

МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А. Н. КОЛМОГОРОВ, С. П. НОВИКОВ

26

Ж. ЛЕРЕ

ЛАГРАНЖЕВ
АНАЛИЗ
И КВАНТОВАЯ
МЕХАНИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР" МОСКВА



SÉRIES DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

I. R. M. A.

JEAN LERAY

ANALYSE LAGRANGIENNE
ET MÉCANIQUE QUANTIQUE;
UNE STRUCTURE MATHÉMATIQUE
APPARENTÉE AUX
DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES
ET À L'INDICE DE MASLOV

Strasbourg, 1978

МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ

26

Ж. ЛЕРЕ

ЛАГРАНЖЕВ АНАЛИЗ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА,
СВЯЗАННАЯ С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ
РАЗЛОЖЕНИЯМИ И ИНДЕКСОМ МАСЛОВА

Перевод с французского
З. Я. ШАПИРО
под редакцией
М. В. ФЕДОРЮКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1981

Монография французского математика Ж. Лере, одного из крупнейших математиков нашего столетия, посвященная асимптотическим методам математической физики. Созданный автором лагранжев анализ использует новейшие достижения современного анализа, алгебры и топологии.

Книга представляет интерес для научных работников, занимающихся математической физикой, дифференциальной и алгебраической топологией, функциональным анализом и теоретической физикой.

Редакция литературы по математическим наукам

1702050000

Л $\frac{20203-015}{041(01)-81}$ 15—81 1 ч.

© Jean Lerey, 1978

© Перевод на русский язык, «Мир», 1981

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Содержание настоящей книги, написанной одним из крупнейших математиков современности Ж. Лере, тесно связано с асимптотическими методами для дифференциальных уравнений математической физики, в частности для уравнений квантовой механики и волновой оптики. Эти уравнения содержат чисто мнимый параметр ν , который в ряде важных задач можно считать большим, и в простейшей ситуации асимптотику решения можно искать в виде произведения быстро осциллирующей экспоненты $e^{\nu\varphi(x)}$ и асимптотического ряда по степеням ν^{-1} . Такое приближение называется в квантовой механике квазиклассическим, а в волновой оптике — геометрооптическим (или коротковолновым), и восходит к П. Дебаю. Фазовая функция удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби классической механики, и потому говорят, что «при $\hbar \rightarrow 0$ квантовая механика переходит в классическую». Однако, как хорошо известно, условием квазиклассичности служит не малость постоянной Планка $\hbar$ (заметим, что $\nu = i/\hbar$), а малость отношения дебройлевской длины волны частицы к характерной длине рассматриваемой квантовомеханической системы. Эта величина пропорциональна $\hbar$, и для удобства вычислений считают малым параметром постоянную $\hbar$. Аналогично обстоит дело и в волновой оптике.

Дебаевское приближение, как правило, непригодно в большом, из-за наличия каустик — многообразий, на которых оно обращается в бесконечность. До последнего времени асимптотика решений вблизи каустик была исследована лишь в простейших случаях — гладкой каустики, каустики с гладким ребром возврата (или с «клювом», в плоской задаче). Асимптотика решений в этих случаях выражается через эталонные интегралы Эйри и Пирси.

Метод, который позволил построить асимптотику решений в большом, в том числе и для более широких классов дифференциальных уравнений, был развит В. П. Масловым и привел к таким новым математическим понятиям, как канонический оператор, индекс Маслова, условия квантования Маслова. Все эти понятия связаны с классом многообразий,

названных В. П. Масловым лагранжевыми. Каждое такое решение ассоциировано с некоторым лагранжевым многообразием, и его асимптотика выражается через функции, заданные на этом многообразии.

В настоящей книге Ж. Лере показал, что с лагранжевыми многообразиями связан новый самостоятельный раздел анализа, названный им лагранжевым анализом. Объектом этого анализа служат пространства лагранжевых функций, определенных на лагранжевых многообразиях, и лагранжевы дифференциальные уравнения, не связанные ни с какими асимптотическими разложениями. Существенную роль в построениях Ж. Лере играют введенные им новые интегральные преобразования S_A , частным случаем которых являются v/i -преобразования Фурье. Группа S_A изоморфна двукратному накрытию $Sp_2(l)$ симплектической группы $Sp(l)$.

В главе I помимо свойств преобразований S_A изложены также основные свойства лагранжевых многообразий и лагранжевых грассманианов, симплектическая и q -симплектические геометрии и определения и основные свойства индексов Маслова. В главе II развит лагранжев анализ: введены лагранжевы функции и лагранжевы дифференциальные операторы. Центральную часть этой главы составляют §§ 3, 4, в которых построены решения лагранжевых уравнений и систем. В главах III, IV лагранжев анализ применяется к ряду важнейших задач нерелятивистской и релятивистской квантовой механики.

Специально для русского издания Ж. Лере сделал ряд изменений и уточнений своей работы; переводчик и редактор весьма признательны ему за это. В настоящем издании добавлены ссылки на работы, примыкающие к тематике книги.

М. В. Федорюк

Посвящается Гансу Леви

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физики пользуются точными решениями $\hat{u}(x)$ эволюционных задач только в наиболее простых случаях. Обычно они прибегают к «асимптотическим решениям» типа

$$u(v, x) = \alpha(v, x) e^{v\varphi(x)}, \quad (1)$$

где «фаза» φ есть действительная функция точки $x \in X = \mathbb{R}^1$, «частота» v — чисто мнимый параметр, а «амплитуда» α — формальный ряд по степеням $\frac{1}{v}$:

$$\alpha(v, x) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} \alpha_r(x).$$

Дифференциальное уравнение эволюционного процесса

$$a\left(x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}\right) u(v, x) = 0 \quad (2)$$

удовлетворяется в том смысле, что его левая часть есть произведение $e^{v\varphi}$ и формального ряда по степеням $\frac{1}{v}$, первые (или все!) члены которого равны нулю. Построение этих асимптотических решений давно уже является классическим и называется методом W. K. B.

фаза φ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, нелинейному, если оператор a выше 1-го порядка;

амплитуда α находится интегрированием вдоль тех характеристик этого уравнения первого порядка, которые определяют φ .

В квантовой механике, например, вычисления проводятся сначала так, как если бы величина

$$v = \frac{i}{\hbar} \quad (2\pi\hbar \text{ — постоянная Планка})$$

стремилась к $i\infty$, а затем подставляется ее числовое значение v_0 .

Физики строят асимптотические решения задач равновесия и периодических задач, заменяя, например, задачи волновой оптики задачами геометрической оптики; но у функции u

возникает скачок, а у α — особенности на огибающей характеристик, определяющих φ , например в геометрической оптике на огибающей световых лучей, т. е. на каустиках, которые являются образами источников света; однако вне каустик закономерности геометрической оптики остаются в силе.

В полной общности эти скачки фазы описываются введенным В. П. Масловым понятием индекса (определение которого было прояснено В. И. Арнольдом). С помощью преобразования Фурье Маслов показал, что особенности амплитуды являются только кажущимися, однако для этого ему пришлось наложить некоторые «условия квантования».

Формулировка этих условий подразумевает, что ν есть данное чисто мнимое число ν_0 вопреки предположению, что $\nu \rightarrow i\infty$. Последнее предположение необходимо, однако, для того, чтобы преобразование Фурье было точечным — факт, существенно используемый Масловым.

Но можно не пользоваться понятием асимптотического разложения, а построить такую математическую концепцию, которая позволяет использовать преобразование Фурье, выражения типа (1), условия квантования Маслова и задавать фиксированное число ν_0 .

Этот подход приводит к новой математической структуре — лагранжеву анализу, — которая требует задания константы ν_0 и основывается на симплектической геометрии. Область приложения этой структуры выяснится позже; возможно, что это будет квантовая механика; действительно, эта структура позволяет дать новую интерпретацию уравнениям Шредингера, Клейна — Гордона и Дирака при условии, что

$$\nu_0 = \frac{i}{\hbar} = \frac{2\pi i}{h} \quad (h — \text{постоянная Планка}).$$

В последующем действительное число $\frac{2\pi i}{\nu_0}$, выбор которого определяет эту новую математическую структуру, мы будем иногда называть «постоянной Планка».

Постоянная ν_0 вводится, чтобы определить лагранжевы функции на V (гл. II, § 2, п. 3) подобно тому, как Планк вводит постоянную $\hbar$, чтобы описать спектр черного тела; можно, следовательно, назвать этот подход *введением постоянной Планка в математику*.

Краткое изложение содержания имеется во введениях, заключениях и резюме глав и параграфов.

Заключительное замечание: В. И. Арнольд спросил меня в 1967 г. в Москве, как я понимаю работы Маслова [10] и [11]. Данная работа есть ответ на этот вопрос.

При ее написании мне очень помог Ж. Ласку с его замечательной эрудицией.

Глава I

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГРУППА

Введение

В этой главе выясняется связь, существующая между двумя весьма классическими понятиями. Эта связь позволяет в гл. II изучить асимптотические решения уравнений в частных производных.

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, МЕТАПЛЕКТИЧЕСКАЯ И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГРУППЫ

0. Введение

Историческое замечание. Метаплектическая группа была определена И. Сигалом [14]. Ее изучение продолжил Д. Шаль [15]; В. С. Буслаев [3], [11] отметил, что это понятие делает теорию Маслова независимой от выбора координат. А. Вейль [18] изучил эту группу над произвольным полем, чтобы углубить работы Зигеля по теории чисел.

Резюме. Мы изучаем эту группу, чтобы выяснить, как она действует на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$, $\mathcal{H}(\mathbb{R}^l)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^l)$ (см. теорему 2) и как она преобразует дифференциальные операторы (см. теорему 3.1).

1. Метаплектическая группа $Mp(l)$

Обозначения: X — векторное пространство $\mathbb{R}^l$ ($l > 1$), снабженное мерой Лебега $d^l x$; X^* — двойственное пространство к X ; $\langle p, x \rangle$ — значение $p \in X^*$ на $x \in X$.

Пространства функций и обобщенных функций на X . Гильбертово пространство $\mathcal{H}(X)$ — это пространство функций $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, таких, что

$$|f| = \sqrt{\int_X |f(x)|^2 d^l x} < \infty.$$

Пространство Шварца $\mathcal{S}(X)$ [13] — это пространство функций $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, быстро убывающих и бесконечно дифференцируемых. Это значит, что для каждой пары (q, r)

т.е. $\mathcal{S}(X)$ — подпространство $\mathcal{H}(X)$

$$q = (q_1, \dots, q_l)$$

$$z = (z_1, \dots, z_l)$$

10

l -индексов

$$|f|_{q,r} = \sup_x \left| x^q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^r f(x) \right| < \infty.$$

Топология в $\mathcal{P}(X)$ определена фундаментальной счетной системой окрестностей нуля $V(q, r, \varepsilon)$, каждая из которых зависит от пары (q, r) l -индексов и рационального $\varepsilon > 0$:

$$V(q, r, \varepsilon) = \{f \mid |f|_{q,r} \leq \varepsilon\}.$$

Ограниченные множества B пространства $\mathcal{P}(X)$ определяются набором констант:

$$(q, r \in \mathbb{N}^l, \quad b_{q,r} \in \mathbb{R}) \quad B(\{b_{q,r}\}) = \{f \mid \forall_{q,r} |f|_{q,r} \leq b_{q,r}\}.$$

Пространство Шварца $\mathcal{P}'(X)$ [13] — это пространство обобщенных функций на $\mathcal{P}(X)$. Это значит, что $f' \in \mathcal{P}'(X)$ есть непрерывный линейный функционал

$$\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Значение f' на f будет обозначаться $\int_X f'(x) f(x) d^l x$, несмотря

на то что значение f' в точке x , вообще говоря, не определено. Верхняя грань f' на ограниченном множестве $B \in \mathcal{P}(X)$ обозначается

$$|f'|_B = \sup_{f \in B} \left| \int_X f'(x) f(x) d^l x \right|.$$

Непрерывность f' эквивалентна условию ограниченности f' , т.е. требованию, чтобы $\forall B \quad |f'|_B < \infty$. Топология $\mathcal{P}'(X)$ определяется фундаментальной системой окрестностей нуля V' , каждая из которых зависит от ограниченного множества $B \subset \mathcal{P}(X)$ и числа $\varepsilon > 0$:

$$V'(B, \varepsilon) = \{f' \mid |f'|_B < \varepsilon\}.$$

Эта топология не определяется счетной фундаментальной системой окрестностей нуля.

Напомним следующие теоремы: $\mathcal{H}(X)$ отождествляется с частью $\mathcal{P}'(X)$:

$$\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{H}(X) \subset \mathcal{P}'(X).$$

Преобразование Фурье есть непрерывный автоморфизм $\mathcal{P}'(X)$, ограничения которого на $\mathcal{H}(X)$ и $\mathcal{P}(X)$ являются соответственно унитарным и непрерывным автоморфизмами.

$$\mathcal{P}(X) \text{ плотно в } \mathcal{P}'(X).$$

Для доказательства этой последней теоремы см. Л. Шварц [13], гл. VIII, § 4, комментарий к теореме IV и гл. III, § 3, теорема XV или гл. VI, § 4 теор. XI и комментарий к ней.

$$R = R \setminus \{0\}$$

Дифференциальные операторы, ассоциированные с элементами $Z(l) = X \oplus X^*$. Пусть v — мнимое число с аргументом $\frac{\pi}{2} : \frac{v}{i} > 0$. Пусть, далее, a^0 — линейная функция $a^0: Z(l) \rightarrow \mathbb{R}$; $a^0(z) = a^0(x, p)$ — ее значение в точке $z = x + p$ ($z \in Z(l)$, $x \in X$, $p \in X^*$). Оператор

$$a = a^0 \left(x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

есть самосопряженный эндоморфизм $\mathcal{P}'(X)$: сопряженный к a оператор, который является эндоморфизмом $\mathcal{P}(X)$, есть ограничение a на $\mathcal{P}(X)$. Эти операторы a и функции a^0 являются элементами векторных пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^0$ размерности $2l$, между которыми существует естественный изоморфизм

$$\mathcal{A}^0 \ni a^0 \mapsto a \in \mathcal{A}.$$

Мы будем говорить, что a_0 есть дифференциальный оператор, ассоциированный с $a^0 \in \mathcal{A}^0$. Пространство $\mathcal{A}^0$, двойственное к $Z(l)$, будет таким образом идентифицировано с $\mathcal{A}$.

Коммутатор a и $b \in \mathcal{A}$ есть

$$[a, b] = ab - ba \in \mathbb{C};$$

$c \in \mathbb{C}$ обозначает эндоморфизм $\mathcal{P}'(X)$:

$$\forall f \in \mathcal{P}'(X) \quad c: f \mapsto cf.$$

Чтобы изучить этот коммутатор введем в $Z(l)$ симплектическую структуру $[\cdot, \cdot]$, определенную равенством

$$[z, z'] = \langle p, x' \rangle - \langle p', x \rangle,$$

где $z = x + p$, $z' = x' + p'$, $x, x' \in X$, $p, p' \in X^*$. Всякая функция $a^0 \in \mathcal{A}^0$ определена единственным элементом $a^1 \in Z(l)$, так что

$$a^0(z) = [a^1, z]. \quad (1.1)$$

Отсюда возникает естественный изоморфизм

$$Z(l) \ni a^1 \mapsto a^0 \in \mathcal{A}^0. \quad (1.2)$$

Коммутатор a и $b \in \mathcal{A}$, очевидно, удовлетворяет условию

$$[a, b] = \frac{1}{v} [a^1, b^1], \quad (1.3)$$

где правая часть определена симплектической структурой $Z(l)$.

Рассмотрим автоморфизм S пространства $\mathcal{P}'(X)$. Этот автоморфизм переводит оператор $a \in \mathcal{A}$ в оператор $b =$

$= SaS^{-1}$, определенный условием

$$\forall f \in \mathcal{P}'(X) \quad bSf = Saf;$$

если $a \neq 0$, то $b \neq 0$. В общем случае $b \notin \mathcal{A}$.

Определение 1.1. $G(l)$ есть группа непрерывных автоморфизмов S пространства $\mathcal{P}'(X)$, которые переводят $\mathcal{A}$ в себя, т. е. таких, что

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad SaS^{-1} \in \mathcal{A}. \quad (1.4)$$

Очевидно, что $G(l)$ — полугруппа; если $S \in G(l)$, то преобразование

$$a \mapsto SaS^{-1} \quad (1.5)$$

является автоморфизмом $\mathcal{A}$. Следовательно, $S^{-1} \in G(l)$ и $G(l)$ — группа.

Аutomорфизм (1.5) пространства $\mathcal{A}$ вследствие естественного изоморфизма $Z(l) \rightarrow \mathcal{A}$ приводит к автоморфизму векторного пространства $Z(l)$:

$$s: a^1 \mapsto sa^1. \quad (1.6)$$

Так как S коммутирует с автоморфизмом $c \in \mathbf{C}$ пространства $\mathcal{P}'(X)$ и так как $[a, b] \in \mathbf{C}$, то мы имеем

$$[SaS^{-1}, SbS^{-1}] = [a, b],$$

т. е. в силу (1.3) и эквивалентности (1.5) и (1.6)

$$[sa^1, sb^1] = [a^1, b^1].$$

Таким образом, s есть автоморфизм симплектического пространства $Z(l)$.

Группа автоморфизмов этого симплектического пространства $Z(l)$ называется *симплектической группой* и обозначается $Sp(l)$:

$$s \in Sp(l).$$

В силу (1.1) мы имеем

$$[sa^1, z] = [a^1, s^{-1}z] = (a^0 \circ s^{-1})(z).$$

Окончательно, имеем

Лемма 1.1. Для всякого $S \in G(l)$ автоморфизм

$$a \mapsto SaS^{-1}$$

пространства $\mathcal{A}$ переходит при естественном изоморфизме $\mathcal{A}, Z(l)$ и $\mathcal{A}^0$ в автоморфизмы:

$s: a^1 \mapsto sa^1$ пространства $Z(l)$; $s \in Sp(l)$, $a^0 \mapsto a^0 \circ s^{-1}$ пространства $\mathcal{A}^0$.

Отображение $S \rightarrow s$ есть естественный морфизм

$$G(l) \mapsto Sp(l). \quad (1.7)$$

Лемма 1.2. Ядро морфизма (1.7) есть подгруппа $G(l)$, элементами которой являются автоморфизмы $\mathcal{P}'(X)$ вида

$$\forall f \in \mathcal{P}'(X), f \mapsto cf, \text{ где } c \in \dot{\mathbb{C}},$$

($\dot{\mathbb{C}}$ — комплексная плоскость с выколотой точкой).

Эту подгруппу мы будем обозначать $\dot{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Всякая константа $c \in \dot{\mathbb{C}}$ коммутирует с любым $a \in \mathcal{A}(l)$ и, следовательно, принадлежит ядру. Обратно, предположим, что S принадлежит ядру. Это значит, что S — автоморфизм $\mathcal{P}'(X)$, коммутирующий с любым $a \in \mathcal{A}(l)$. Пусть $p \in X^*$. Очевидно, что

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} + p\right) e^{-v \langle p, x \rangle} = 0.$$

Следовательно, так как S коммутирует с $\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} + p$, то

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} + p\right) S e^{-v \langle p, x \rangle} = 0.$$

Интегрируя эту систему уравнений, получаем

$$S e^{-v \langle p, x \rangle} = c(p) e^{-v \langle p, x \rangle}, \text{ где } c: X^* \rightarrow \mathbb{C}; \quad (1.8)$$

дифференцируя по p , мы видим, что градиент c_p существует и удовлетворяет условию

$$-v S [x e^{-v \langle p, x \rangle}] = -v x S e^{-v \langle p, x \rangle} + c_p e^{-v \langle p, x \rangle}.$$

Так как преобразование S и умножение на x коммутируют, то отсюда следует, что

$$c_p = 0.$$

Таким образом, $c(p)$ не зависит от p , и мы обозначим его просто c .

Обозначим F преобразование Фурье. Для $f \in \mathcal{P}(X)$ положим $g = F^{-1}f$. Тогда по определению F

$$f(x) = \left(\frac{|v|}{2\pi i}\right)^{l/2} \int_X e^{-v \langle p, x \rangle} g(p) d^l p.$$

Так как $S e^{-v \langle p, x \rangle} = c e^{-v \langle p, x \rangle}$, то отсюда получаем

$$\forall f \in \mathcal{P}(X) \quad Sf = cf.$$

Но $\mathcal{P}(X)$ плотно в $\mathcal{P}'(X)$ и, следовательно,

$$S = c \in \dot{\mathbb{C}}.$$

Лемма доказана.

С помощью других подгрупп $G(l)$ мы докажем, что отображение $G(l) \rightarrow Sp(l)$ есть эпиморфизм. Эти подгруппы таковы:

(i) Конечная группа, порожденная преобразованием Фурье по одной из переменных (при условии, что выбран базис в векторном пространстве X).

(ii) Группа, состоящая из автоморфизмов $\mathcal{P}'(X)$ вида

$$f \mapsto e^{vQ} f,$$

где Q — действительная квадратичная форма: $X \rightarrow \mathbb{R}$.

(iii) Группа, состоящая из автоморфизмов $\mathcal{P}'(X)$

$$f' \mapsto f, \text{ где } f(x) = \sqrt{\det T} f'(Tx) \text{ и } T \text{ — автоморфизм } X.$$

Ограничение каждой из этих групп на $\mathcal{P}(X)$ есть группа автоморфизмов $\mathcal{P}(X)$, а их ограничения на $\mathcal{H}(X)$ являются группами унитарных (т. е. изометрических) преобразований $\mathcal{H}(X)$.

Определение 1.2. Пусть A — множество элементов A , каждый из которых задается

1) квадратичной формой $X \oplus X^* \rightarrow \mathbb{R}$, принимающей в точке $(x, x') \in X \oplus X^*$ значение

$$A(x, x') = \frac{1}{2} \langle Px, x \rangle - \langle Lx, x' \rangle + \frac{1}{2} \langle Qx', x' \rangle, \quad (1.9)$$

где (обозначая ${}^tP$ матрицу, транспонированную с P)

$$P = {}^tP: X \rightarrow X^*, \quad L: X \rightarrow X^*, \quad Q = {}^tQ: X \rightarrow X^*, \quad \det L \neq 0.$$

2) Выбором $\arg \det L = \pi m(A)$, где $m(A) \in \mathbb{Z}$; этот выбор аргумента, в частности, позволяет определить

$$\Delta(A) = \sqrt{\det L} \text{ условием } \arg \Delta(A) = \frac{\pi}{2} m(A).$$

Замечание. $\det L$ вычисляется в координатах пространства X^* , двойственных к координатам X , и не зависит от выбора координат, если $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^l = d^l x$.

Замечание. Позднее (см. (2.15) и § 2 (8.6)) число $m(A)$ будет идентифицировано с индексом Маслова.

Каждому A мы сопоставим эндоморфизм S_A пространства $\mathcal{P}(X)$, определенный формулой

$$(S_A f')(x) = \left[\frac{|v|}{2\pi i} \right]^{l/2} \Delta(A) \int_X e^{vA(x, x')} f'(x') d^l x', \quad (1.10)$$

где $f' \in \mathcal{P}(X)$, $\arg[i]^{l/2} = \frac{\pi l}{4}$.

Преобразование S_A ¹⁾, очевидно, является произведением элементов групп (i), (ii) и (iii) и, следовательно, является автоморфизмом $\mathcal{P}(X)$, который по непрерывности продолжается до унитарного автоморфизма $\mathcal{H}(X)$ и до автоморфизма $\mathcal{P}'(X)$. Мы сохраним для всех трех автоморфизмов обозначение S_A ; $S_A \in G(l)$. Образ s_A автоморфизма S_A в группе $S_p(l)$ определяется следующим образом: $(A_x$ — градиент по x) $(x, p) = s_A(x', p')$ означает, что

$$p = A_x(x, x'), \quad p' = -A_{x'}(x, x'). \quad (1.11)$$

Докажем формулу (1.11). Пусть $f' \in \mathcal{P}(X)$. Вычислим $\frac{\partial}{\partial x}(S_A f')$ и $S_A\left(\frac{\partial}{\partial x} f'\right)$ с помощью дифференцирования (1.10) и интегрирования по частям. Мы получим

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} - Px = -S_A({}^t Lx) S_A^{-1}; \quad S_A\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} + Qx\right) S_A^{-1} = Lx.$$

Эти соотношения означают, что, полагая

$$(x, p) = s_A(x', p'),$$

мы имеем

$$\forall x' \in X, \quad p' \in X^*, \quad p - Px = -{}^t Lx', \quad p' + Qx' = Lx,$$

что и доказывает формулу (1.11).

Определение 1.3. Обозначим Σ_{Sp} множество элементов $s \in Sp(l)$, таких, что в $2l$ -мерном подпространстве $Z(l) \oplus \oplus Z(l)$, заданном уравнениями

$$(x, p) = s(x', p'),$$

x и x' не являются независимыми.

Напомним хорошо известную теорему: Множество s_A , определенное формулой (1.11), есть $Sp(l) \setminus \Sigma_{Sp}$.

¹⁾ Интегральное преобразование S_A , играющее фундаментальную роль в лагранжевом анализе, связано с решением задачи Коши для обобщенного квантовомеханического осциллятора

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\left(x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi,$$

$$\psi|_{t=0} = f(x),$$

гамильтониан которого $H(x, p)$ — вещественная квадратичная форма от x, p . В частности, если $H = \frac{1}{2}(x^2 + p^2)$, то при $0 < t_0 < \pi/2$ имеем $\psi(x, t_0) = (S_A f)(x)$, где

$$P = Q = I \operatorname{ctg} t_0, \quad L = -2I (\sin t_0)^{-1}.$$

— Прим. ред.

Доказательство. Очевидно, что $s_A \notin \Sigma_{Sp}$. Обратно, пусть $s \in Sp(l)$. На $2l$ -плоскости $Z(l) \oplus Z(l)$, заданной уравнением

$$(x, p) = s(x', p'),$$

имеем в силу симплектичности s

$$\langle p, dx \rangle - \langle dp, x \rangle = \langle p', dx' \rangle - \langle dp', x' \rangle,$$

откуда

$$\frac{1}{2} d[\langle p, x \rangle - \langle p', x' \rangle] = \langle p, dx \rangle - \langle p', dx' \rangle.$$

Предположим, что $s \notin \Sigma_{Sp}$, т. е. x и x' независимы на $2l$ -плоскости $(x, p) = s(x', p')$. Определим на этой плоскости

$$A(x, x') = \frac{1}{2} \langle p, x \rangle - \frac{1}{2} \langle p', x' \rangle. \quad (1.12)$$

Тогда $dA = \langle p, dx \rangle - \langle p', dx' \rangle$, т. е. $p = A_x$, $p' = -A_{x'}$; x и A_x должны быть независимы: $\det(A_{x^j} A_{x^k}) \neq 0$. Следовательно,

$s = s_A$ ч. и т. д.

Преобразования s_A , очевидно, порождают $Sp(l)$, откуда следует

Лемма 1.3. *Натуральный морфизм*

$$G(l) \rightarrow Sp(l)$$

является эпиморфизмом.

$G(l)$ есть группа Ли и в силу леммы 1.2

$$G(l)/\dot{C} = Sp(l) \quad (1.13)$$

($\dot{C}$ есть центр $G(l)$, так как центр $Sp(l)$ состоит из единичного элемента).

Определение 1.4. *Метаплектическая группа $Mp(l)$ — это подгруппа $G(l)$, состоящая из элементов, ограничения которых на $\mathcal{H}(X)$ являются унитарными автоморфизмами. Так как для каждого A $s_A \in Mp(l)$ и s_A порождают $Sp(l)$, то естественный морфизм*

$$Mp(l) \rightarrow Sp(l)$$

является эпиморфизмом. В силу (1.13) каждый элемент $G(l)$ единственным образом представим в виде

$$cS, \quad \text{где } S \in Mp(l), \quad c > 0.$$

Обозначим через R_+ мультипликативную группу положительных действительных чисел. Мы имеем тогда

$$G(l) = R_+ \times Mp(l). \quad (1.14)$$

Изучение $G(l)$ сводится, следовательно, к изучению группы $Mr(l)$. Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. $Mr(l)$ есть группа автоморфизмов $\mathcal{P}'(X)$, ограничения которых на $\mathcal{H}(X)$ являются унитарными автоморфизмами.

1) Обозначим S^1 мультипликативную группу комплексных чисел с модулем 1:

$$Mr(l)/S^1 = Sp(l) \quad (1.15)$$

2) Обозначим Σ_{Mr} гиперповерхность $Mr(l)$, проектирующуюся в Σ_{Sp} . Произвольный элемент $Mr(l) \setminus \Sigma_{Mr}$ представляется в виде cS_A , где $c \in S^1$, а S_A задается формулой (1.10).

3) Ограничение любого элемента $S \in Mr(l)$ на $\mathcal{P}(X)$ есть автоморфизм $\mathcal{P}(X)$.

Доказательство. 1) (формулы (1.13) и (1.14)) S^1 отождествляется с подгруппой $Mr(l)$.

2) Пусть $S \in Mr(l) \setminus \Sigma_{Mr}$. Образ S в $Sp(l)$ является, следовательно, преобразованием типа s_A ; $SS_A^{-1} \in S^1$ в силу (1.15).

3) В силу 2) $S = cS_A, \dots, S_{A'}$, 3) вытекает из того, что ограничения на $\mathcal{P}(X)$ $c, S_A, \dots, S_{A'}$ являются автоморфизмами $\mathcal{P}(X)$.

2. Подгруппа $Sp_2(l)$ группы $Mr(l)$

Определение 2.1. Мы обозначим $Sp_2(l)$ подгруппу $Mr(l)$, порожденную преобразованиями S_A . Цель этого пункта — доказать, что $Sp_2(l)$ есть двукратное накрытие группы $Sp(l)$. Для доказательства этого утверждения найдем результат композиции преобразований S_A и обратные преобразования.

Определение 2.2. Если задано $A \in A$, определим $A^* \in A$ следующим образом:

$$A^*(x, x') = -A(x', x); \quad \Delta(A^*) = i^l \overline{\Delta(A)}; \quad m(A^*) = l - m(A).$$

Лемма 2.1. $S_A^{-1} = S_{A^*}$, следовательно, $s_A^{-1} = s_{A^*}$.

Доказательство. Нужно доказать для f и $f' \in \mathcal{P}(X)$ эквивалентность двух условий:

$$f(x) = \left(\frac{|v|}{2\pi i} \right)^{l/2} \Delta(A) \int_X e^{vA(x, x')} f'(x') d^l x',$$

$$f'(x') = \left(\frac{|v| i}{2\pi} \right)^{l/2} \Delta(A) \int_X e^{-vA(x, x')} f(x) d^l x,$$

т. е., согласно определению A (см. (1.9)), эквивалентность условий

$$f(x) = \int_X e^{-v \langle Lx, x' \rangle} f'(x') d^l x',$$

$$f'(x') = \left(\frac{|v|}{2\pi} \right)^l |\det L| \int_X e^{v \langle Lx, x' \rangle} f(x) d^l x.$$

Но эквивалентность двух последних формул следует из формулы обращения преобразования Фурье, что и доказывает лемму.

Чтобы найти результат композиции S_A , найдем явное выражение $S_A(e^{v\varphi'})$, где φ' — многочлен 2-й степени. Для этого введем определение.

Определение 2.3. Выберем координаты в X , в которых $d^l x = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^l$, и двойственные координаты в X^* . Вводимые далее понятия не зависят от этого выбора. Пусть

$$\varphi: X \rightarrow R$$

— действительная, дважды дифференцируемая функция. Через $\text{Hess}_x(\varphi)$ обозначим ее гессиан, т. е. определитель из вторых производных. Это определитель квадратичной формы

$$X \ni dx \mapsto \langle d\varphi_x, dx \rangle \in R.$$

$\text{Inert}_x(\varphi)$ означает *индекс инерции* этой формы¹⁾. Он определен, когда $\text{Hess}(\varphi) \neq 0$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \text{Inert}(-\varphi) &= l - \text{Inert}(\varphi), \\ \arg \text{Hess}(\varphi) &= \pi \text{Inert}(\varphi) \bmod 2\pi. \end{aligned}$$

По определению положим

$$\arg \text{Hess}(\varphi) = \pi \text{Inert}(\varphi). \quad (2.1)$$

Отсюда имеем, например,

$$[\text{Hess}(\varphi)]^{1/2} = |\text{Hess}(\varphi)|^{1/2} i^{\text{Inert}(\varphi)}. \quad (2.2)$$

Если φ — действительная квадратичная форма

$$\varphi: X \ni x \mapsto \frac{1}{2} \langle Rx, x \rangle, \quad \text{где } R = {}^t R: X \rightarrow X^*,$$

то $\text{Hess}(\varphi)$ и $\text{Inert}(\varphi)$ мы будем обозначать $\text{Hess}(R)$ и $\text{Inert}(R)$. $\text{Hess}(R)$ есть определитель симметрической мат-

¹⁾ То есть число отрицательных собственных значений симметрического линейного оператора $dx \mapsto d\varphi_x$.

рицы R . $\text{Inert}(R)$ — число ее отрицательных собственных значений. Очевидно, что

$$\text{Inert}(R) = \text{Inert}(R^{-1}); \quad [\text{Hess}(R)]^{1/2} \cdot [\text{Hess}(-R^{-1})]^{1/2} = i^l. \quad (2.3)$$

Лемма 2.2. Пусть φ' — действительный многочлен 2-й степени. Пусть, далее, $A \in \mathbf{A}$ таково, что $\text{Hess}_{x'}(\varphi'(x') + A(x, x')) \neq 0$. $\varphi(x)$ критическое значение многочлена

$$X \ni x' \mapsto A(x, x') + \varphi'(x');$$

φ — многочлен 2-й степени. Справедлива формула

$$S_A(e^{v\varphi}) = \Delta(A) [\text{Hess}_{x'}(\varphi' + A)]^{-1/2} e^{v\varphi}. \quad (2.4)$$

Замечание 2.1. Эта лемма предполагает, что $\frac{v}{i} > 0$. До этого момента достаточно было предположить $\frac{v}{i}$ действительным числом $\neq 0$.

Доказательство леммы. Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Следовательно, если $c \in \mathbf{C}$ и $|\arg \mu| < \frac{\pi}{2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mu}{2}(x+c)^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu}} \quad \left(|\arg \sqrt{\mu}| < \frac{\pi}{4} \right).$$

Отсюда для любого $p \in \mathbf{C}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vpx} e^{-\frac{\mu}{2}(x+c)^2} dx &= e^{v\varphi} \int_X e^{-\frac{1}{2\mu}[vp+\mu(x+c)]^2} dx = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu}} e^{v\varphi}, \end{aligned}$$

где φ — критическое значение функции

$$x \mapsto \varphi'(x) - px \quad \text{при} \quad \varphi' = -\frac{\mu}{2v}(x+c)^2.$$

По определению преобразования Фурье F

$$\forall f' \in \mathcal{S}(X) \quad (Ff')(p) = \left(\frac{|v|}{2\pi i} \right)^{l/2} \int_X e^{-v\langle p, x' \rangle} f'(x') d^l x'; \quad (2.5)$$

и мы имеем, следовательно, при $l=1$ и $|\arg \mu| < \frac{\pi}{2}$

$$Fe^{v\varphi} = \frac{\sqrt{|v|}}{\sqrt{\mu} \sqrt{i}} e^{v\varphi}, \quad \text{где} \quad \sqrt{i} = e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

Так как F есть непрерывный автоморфизм $\mathcal{P}'(X)$, то предыдущая формула остается в силе для $\mu = -\varepsilon v$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Мы получим тогда

$$\frac{\sqrt{\mu} \sqrt{i}}{\sqrt{|v|}} = \sqrt{\varepsilon} \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0; \quad \frac{\sqrt{\mu} \sqrt{i}}{\sqrt{|v|}} = i \sqrt{|\varepsilon|} \quad \text{при} \quad \varepsilon < 0.$$

Другими словами, когда $l=1$, справедлив следующий результат: пусть $\varphi': X \rightarrow R$ многочлен 2-й степени, такой, что $\text{Hess}(\varphi') \neq 0$. Пусть $\varphi(p)$ — критическое значение многочлена

$$x \mapsto \varphi'(x) - \langle p, x \rangle.$$

Тогда

$$Fe^{v\varphi} = [\text{Hess} \varphi']^{-\frac{1}{2}} e^{v\varphi}. \quad (2.6)$$

Чтобы доказать, что формула (2.6), полученная для $l=1$, справедлива для $l \geq 1$, достаточно выбрать в X координаты, в которых многочлен

$$\varphi'(x) = \sum_{j=1}^l \varphi'_j(x^j),$$

где φ'_j — многочлены 2-й степени от одной переменной.

Из определения (1.9) функции A и определения (1.10) преобразования S_A при $P = Q = 0$ мы получим

$$(S_A f')(x) = \Delta(A)(Ff')(Lx);$$

т.е. формула (2.6) доказывает лемму в этом случае. В силу определения A и S_A общий случай эквивалентен этому.

Чтобы найти композицию S_A , найдем ее сначала для s_A .

Лемма 2.3.

1) Пусть A и $A' \in \mathbf{A}$. Условие

$$s_A s_{A'} \notin \Sigma_{Sp} \quad (2.7)$$

эквивалентно условию

$$\text{Hess}_{x'}[A(x, x') + A'(x', x'')] \neq 0 \quad (\text{этот Hess} = \text{const}). \quad (2.8)$$

2) В силу леммы (2.1) это условие эквивалентно существованию $A'' \in \mathbf{A}$, такого, что

$$s_A s_{A'} s_{A''} = e \quad (\text{единица группы } Sp(l)), \quad (2.9)$$

A'' определяется условием, что критическое значение многочлена

$$x' \mapsto A(x, x') + A'(x', x'') + A''(x'', x)$$

равно нулю.

3) Определим A' и A'' через P', Q', L' и P'', Q'', L'' аналогично тому, как A определено формулой (1.9) через P, Q и L . Условие (2.8) эквивалентно тогда обратимости

$$P' + Q,$$

при этом A'' определится из условий

$$\left. \begin{aligned} P'' + Q' &= L'(P' + Q)^{-1} {}^t L', & P + Q'' &= {}^t L(P' + Q)^{-1} L, \\ L'' &= - {}^t L(P' + Q)^{-1} {}^t L'. \end{aligned} \right\} (2.10)$$

Замечание 2.2. Обозначая $A(x, x') + A'(x', x'') + A''(x'', x)$ через $A + A' + A''$, мы имеем

$$\begin{aligned} \text{Inert}_x(A + A' + A'') &= \text{Inert}_{x'}(A + A' + A'') = \\ &= \text{Inert}_{x''}(A + A' + A''); \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\text{Hess}_{x'}(A + A' + A'') = \frac{\Delta^2(A) \Delta^2(A')}{\Delta^2(A''^*)}. \quad (2.12)$$

Доказательство. 1) В силу (1.11) соотношения $(x, p) = s_A(x', p')$, $(x', p') = s_{A'}(x'', p'')$ означают, что

$$p = A_x(x, x'), \quad p' = -A_{x'}(x, x') = A'_{x'}(x', x'');$$

$$p'' = -A'_{x''}(x', x'').$$

Исключая из этих уравнений p' и x' , мы получим

$$(x, p) = s_A s_{A'}(x'', p'').$$

Условие (2.7): $s_A s_{A'} \notin \Sigma_{Sp}$ эквивалентно, следовательно, каждому из трех утверждений:

Исключение p' и x' оставляет x и x'' независимыми.

Равенство $A_{x'}(x, x') + A'_{x'}(x', x'') = 0$ оставляет x и x'' независимыми.

Для любых x и x'' существует x' , удовлетворяющий этим уравнениям.

Но в (1.9) $\det L \neq 0$. Следовательно, (2.7) эквивалентно (2.8).

2) Гипотеза (2.9) означает следующее: в трех соотношениях

$$(x, p) = s_A(x', p'), \quad (x', p') = s_{A'}(x'', p''), \quad (x'', p'') = s_{A''}(x, p)$$

из любых двух следует третье.

Обозначим, как выше,

$$A(x, x') + A'(x', x'') + A''(x'', x) = A + A' + A''.$$

В силу формулы (1.11) это означает, что в трех равенствах

$$\begin{aligned} (A + A' + A'')_x &= 0, & (A + A' + A'')_{x'} &= 0, \\ (A + A' + A'')_{x''} &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

из справедливости одного из них следуют два других и, следовательно, в силу формулы Эйлера следует, что

$$A + A' + A'' = 0.$$

Но, согласно предыдущему,

$(A + A' + A'')_x = 0$, так как $(A + A')_{x'} = 0$, откуда следует, что $A + A' + A'' = 0$.

3) С одной стороны,

$$\text{Hess}_{x'}(A + A' + A'') = \text{Hess}(P' + Q).$$

С другой стороны, три попарно эквивалентных соотношения (2.13) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} (P + Q'')x - {}^tLx' - L''x'' &= 0, \\ -Lx + (P' + Q)x' - {}^tL'x'' &= 0, \\ -{}^tL''x - L'x' + (P'' + Q')x'' &= 0. \end{aligned}$$

Формулы (2.10), очевидно, вытекают из этой эквивалентности.

Доказательство замечания 2.2. В силу (2.10) симметрические матрицы $P'' + Q'$, $(P' + Q)^{-1}$ и $P + Q''$ могут быть преобразованы одна в другую. Следовательно, у них одно и тоже число отрицательных собственных значений, ч. и т. д.

Далее, в силу последнего из соотношений (2.10)

$$\text{Hess}(P' + Q) = (\det L) \cdot (\det L') / (-1)^l \det L''.$$

С учетом определения 2.2 это доказывает (2.12).

Определение 2.4. Пусть заданы

$$s_A, s_{A'}, s_{A''} \in Sp(l) - \Sigma_{Sp}, \text{ такие, что } s_A s_{A'} s_{A''} = e.$$

Определим

$$\text{Inert}(s_A, s_{A'}, s_{A''}) = \text{Inert}_x(A + A' + A'') \quad (\text{см. (2.11)})$$

и

$$\text{Inert}(S_A, S_{A'}, S_{A''}) = \text{Inert}(s_A, s_{A'}, s_{A''}). \quad (2.14)$$

С другой стороны, определим индекс Маслова $m(S_A) \in \mathbb{Z}_4$ формулой

$$m(S_A) = m(A) \pmod{4}. \quad (2.15)$$

В п. 8 § 2 это определение будет связано с эффективным определением В. П. Маслова.

Из леммы 2.1 и формулы (2.15) в качестве очевидных следствий получаются следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \text{Inert}(s_{A''}^{-1}, s_{A'}^{-1}, s_A^{-1}) &= l - \text{Inert}(s_A, s_{A'}, s_{A''}), \\ m(S_A^{-1}) &= l - m(S_A); \quad m(-S_A) = m(S_A) + 2 \pmod{4}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Теперь, наконец, мы можем изучать композицию S_A .

Лемма 2.4. Пусть A, A', A'' — элементы из A , такие, что

$$S_A S_{A'} S_{A''} = e. \quad (2.17)$$

Тогда

$$S_A S_{A'} S_{A''} = \pm E \quad (E — единица $M_p(l)$). \quad (2.18)$$

Для того чтобы

$$S_A S_{A'} S_{A''} = E, \quad (2.19)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Inert}(S_A, S_{A'}, S_{A''}) = m(S_A) - m(S_A'^{-1}) + m(S_A'') \pmod{4}. \quad (2.20)$$

Замечание. Из условия (2.17), эквивалентного (2.18), следует выполнение (2.20) $\pmod{2}$.

Доказательство. Пусть $y \in X$. Формула (1.10) остается в силе, если взять в качестве f обобщенную функцию

$$\delta'(x) = \delta(x - y).$$

Мы получим при этом

$$(S_{A'} \delta')(x) = \left(\frac{|v|}{2\pi i} \right)^{l/2} \Delta(A') e^{vA'(x, y)}.$$

Отсюда в силу леммы 2.2

$$\begin{aligned} (S_A S_{A'} \delta')(x) &= \left(\frac{|v|}{2\pi i} \right)^{l/2} \Delta(A) \Delta(A') \times \\ &\times \{ \text{Hess}_{x'} [A(x, x') + A'(x', y)] \}^{-\frac{1}{2}} e^{-vA''(y, x)}. \end{aligned}$$

Умножим обе части равенства на $f'(y) d^l y$, где $f' \in \mathcal{P}(X)$, и проинтегрируем. Получим

$$(S_A S_{A'} f') = \frac{\Delta(A) \Delta(A')}{\Delta(A''^*)} [\text{Hess}_{x'} (A + A' + A'')]^{-\frac{1}{2}} S_{A''^*} f'.$$

В силу леммы 2.1 и формулы (2.12) это означает, что

$$S_A S_{A'} S_{A''} = \pm E.$$

Уточним знак. Согласно определению 2.4,

$$\arg [\text{Hess}_{x'} (A + A' + A'')]^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \text{Inert}(S_A, S_{A'}, S_{A''}) \pmod{2\pi}.$$

В силу определения 1.2, формулы (2.16) и леммы (2.1)

$$\arg \Delta(A) = \frac{\pi}{2} m(S_A), \quad \arg \Delta(A') = \frac{\pi}{2} m(S_{A'}) = \frac{\pi}{2} [l - m(S_{A'}^{-1})],$$

$$\arg \Delta(A''^*) = \frac{\pi}{2} m(S_{A''}^{-1}) = \frac{\pi}{2} [l - m(S_{A''})] \pmod{2\pi}.$$

Следовательно,

$$\arg(\pm 1) = \frac{\pi}{2} [\text{Inert}(S_A, S_{A'}, S_{A''}) - m(S_A) + \\ + m(S_{A'}^{-1}) - m(S_{A''})] \pmod{2\pi},$$

чем и завершается доказательство.

Напомним, что $Sp_2(l)$ есть группа, порожденная S_A .

Лемма 2.5. *Каждый элемент $Sp_2(l)$ есть произведение двух S_A .*

Доказательство. По лемме 2.1 всякий элемент $Sp_2(l)$ есть произведение S_A . Таким образом, достаточно доказать, что для любых $U, V, W \in \mathbf{A}$ существуют B и C , такие, что

$$S_U S_V S_W = S_B S_C. \quad (2.21)$$

В силу лемм 2.3, 1) и 2.4 для любого $W \in \mathbf{A}$ и любого T , порождающего $\{S_A\}$, $S_W S_T$ принадлежит $\{S_A\}$ и также порождает $\{S_A\}$. Следовательно, для любого такого T

$$S_V S_T \in \{S_A\}, \quad S_U S_V S_T \in \{S_A\}, \quad S_T^{-1} S_W \in \{S_A\},$$

откуда, полагая $S_B = S_U S_V S_T \in \{S_A\}$, $S_C = S_T^{-1} S_W \in \{S_A\}$, получаем (2.21).

Ограничение естественного морфизма $Mp(l) \rightarrow Sp(l)$ на $Sp_2(l)$ есть, очевидно, естественный морфизм

$$Sp_2(l) \rightarrow Sp(l).$$

Лемма 2.6. *Ядро морфизма $Sp_2(l) \rightarrow Sp(l)$ есть подгруппа*

$$\mathbf{S}^0 = \{E, -E\}.$$

Следовательно, $Sp_2(l) / \mathbf{S}^0 = Sp(l)$.

Доказательство. В силу предыдущей леммы ядро этого морфизма есть множество $S_A S_{A'} (A, A' \in \mathbf{A})$, такое, что $S_A S_{A'} = e$, откуда по лемме 2.1

$$S_{A'} = S_A^*.$$

Следовательно, в силу (1.11)

$$\forall x, x' \in X \quad A'(x, x') = A^*(x, x')$$

и, согласно определению (1.2),

$$\Delta(A') = \pm \Delta(A^*) \quad \text{и} \quad S_{A'} = \pm S_{A^*}.$$

Поэтому $S_A = \pm S_{A^*}$, ч. и т. д.

Лемма 2.7. *Группа $Sp_2(l)$ связна.*

Доказательство. Пусть задано $k \in \mathbb{Z}_4$ (аддитивная группа целых чисел mod 4). Обозначим D_k множество S_A , такое, что

$$m(A) = k, \quad \text{т. е.} \quad i^{-k} \Delta(A) > 0.$$

Множество квадратичных форм A , удовлетворяющих условию $\Delta^2(A) > 0$ (или $\Delta^2(A) < 0$), связно, поэтому каждое D_k есть связная область $Sp_2(l)$.

Пусть, далее, задано $k \in \mathbb{Z}_4$ и заданы S_A и $S_{A'}$, такие, что $m(S_A) - m(S_{A'}^{-1}) = -k \pmod{4}$ и $P' + Q$ имеет одно нулевое и $l - 1$ положительных собственных значений. Пусть B и B' близки к A и A' и таковы, что $\text{Hess}_{x'}(B + B') \neq 0$. При этом $\text{Inert}_{x'}(B + B')$ принимает для разных пар значения 0 и 1. Так как m — локально постоянная функция, то $m(S_B) = m(S_A)$, $m(S_{B'}^{-1}) = m(S_{A'}^{-1})$. Определим $B'' \in \mathbf{A}$ условием $S_B S_{B'} S_{B''} = E$. В силу (2.20) $m(S_{B''})$ принимает значения k и $k + 1$ в любой окрестности элемента $(S_A S_{A'})^{-1}$ группы $Sp_2(l)$. Этот элемент принадлежит, следовательно, $\bar{D}_k \cap \bar{D}_{k+1}$. Таким образом, $\bar{D}_k \cap \bar{D}_{k+1} \neq \emptyset$, что и доказывает лемму.

Приведенные выше леммы доказывают следующую теорему. Ее первое утверждение сводит изучение $Mr(l)$ к изучению $Sp_2(l)$. Эквивалент этого утверждения имеется у Д. Шаля и А. Вейля [15], [18]. Но наше доказательство устанавливает различные другие результаты, которые понадобятся в дальнейшем. Один из них п. 3 теоремы. Он будет применяться в § 2, п. 8.

Теорема 2. 1) Элементы S_A группы $Mr(l)$, определенные формулой (1.10), порождают подгруппу $Sp_2(l)$ группы $Mr(l)$; $Sp_2(l)$ есть накрытие 2-го порядка группы $Sp(l)$; это группа автоморфизмов $\mathcal{P}(X)$, которые продолжаются до унитарных автоморфизмов $\mathcal{H}(X)$ и автоморфизмов $\mathcal{P}'(X)$.

2) Формулы (2.11) и (2.14) определяют инерцию каждой тройки s, s', s'' элементов $Sp(l) \setminus \Sigma_{Sp}$, такой, что

$$ss's'' = e \quad (\text{единица } Sp(l)).$$

Инерция есть локально постоянная функция (разрывная на Σ_{Sp}), принимающая значения $\{0, 1, \dots, l\}$ и удовлетворяю-

щая условиям

$$\text{Inert}(s, s', s'') = \text{Inert}(s'', s, s') = \dots$$

$$\dots = l - \text{Inert}(s''^{-1}, s'^{-1}, s^{-1}).$$

Обозначим Σ_{Sp_2} гиперповерхность $Sp_2(l)$, естественная проекция которой на $Sp(l)$ есть Σ_{Sp} .

Преобразования S_A , определенные формулой (1.10), являются элементами $Sp_2(l) \setminus \Sigma_{Sp_2}$. Пусть тройка S, S', S'' таких элементов удовлетворяет условию

$$SS'S'' = E \quad (\text{единица } Sp_2(l)).$$

Пусть s, s', s'' — проекции этих элементов на $Sp(l)$. По определению

$$\text{Inert}(S, S', S'') = \text{Inert}(s, s', s'').$$

3) Формула (2.15) и определение 1.2 задают на $Sp_2(l) \setminus \Sigma_{Sp_2}$ индекс Маслова m . Это локально постоянная функция (разрывная на Σ_{Sp_2}) со значениями в $\mathbb{Z}_4$. Она удовлетворяет условиям

$$m(S^{-1}) = l - m(S), \quad m(-S) = m(S) + 2 \pmod{4},$$

$$\text{Inert}(S, S', S'') = m(S) - m(S'^{-1}) + m(S'') \pmod{4}.$$

Замечание 2.3. Мы увидим дальше, что эта последняя формула и требование локального постоянства полностью характеризуют m .

Замечание 2.4. Группа $Sp_2(l)$ содержит три подгруппы $G(l)$, которые были определены в п. 1: (i) преобразованиями Фурье; (ii) квадратичными формами; (iii) автоморфизмами X .

Доказательство. Пусть S — элемент $Sp_2(l)$. Легко найти $A \in \mathbf{A}$, такое, что

$$SS_A = S_{A'}, \quad \text{где } A' \in \mathbf{A}.$$

Замечание 2.5. Можно доказать, что всякое $S \in Sp_2(l)$ имеет вид

$$S = S_1 S_2 S_3 S_4,$$

где $S_3 \in (i)$ (преобразование Фурье); S_1 и $S_4 \in (ii)$, имеют вид: $f' \mapsto e^{vQ} f'$, где Q — действительная квадратичная форма; $S_2 \in (iii)$ — это преобразование вида

$$f' \mapsto \sqrt{\det T} f' \circ T, \quad \text{где } T \text{ — автоморфизм } X.$$

3. Дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами

В силу определения 1.1 элементы $Sp_2(l)$ преобразуют эти операторы в операторы того же типа. В этом п. 3 изучается вид этого преобразования.

Пусть a^+ и a^- два многочлена от $\frac{1}{v}$, x и p :

$$a^+(v, x, p) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^+(v, x) p^{\alpha},$$

$$a^-(v, p, x) = \sum_{\alpha} p^{\alpha} a_{\alpha}^-(v, x) \quad (\alpha - \text{мультииндекс}).$$

Рассмотрим два дифференциальных оператора ¹⁾

$$a^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right): f \mapsto \sum_{\alpha} a_{\alpha}^+(v, \cdot) \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} f(\cdot); \quad (3.1)$$

$$a^- \left(v, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}, x \right): f \mapsto \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} [a_{\alpha}^-(v, \cdot) f(\cdot)]. \quad (3.2)$$

Лемма 3.1. *Тождество этих операторов*

$$a^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) = a^- \left(v, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}, x \right) \quad (3.3)$$

эквивалентно существованию многочлена a^0 от $\frac{1}{v}$, x , p , такого, что

$$a^+(v, x, p) = e^{\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} a^0(v, x, p), \quad (3.4)$$

$$a^-(v, p, x) = e^{-\frac{2}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} a^0(v, x, p).$$

Здесь через $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle$ обозначена $\sum_{j=1}^l \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial p_j} (x^j \text{ и } p_j - \text{двойственные координаты в } X \text{ и } X^*)$.

Доказательство. Формула (3.3) определяет биективное отображение $a^- \mapsto a^+$, такое, что для любого $p \in X^*$

$$\begin{aligned} a^+(v, x, p) &= e^{-v \langle p, x \rangle} a^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{v \langle p, x \rangle} = \\ &= e^{-v \langle p, x \rangle} a^- \left(v, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}, x \right) e^{v \langle p, x \rangle} = \\ &= \sum_{\alpha} \left(p + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} a_{\alpha}^-(v, x) = e^{\frac{1}{v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} a^-(v, p, x), \end{aligned}$$

¹⁾ В обозначениях Р. Фейнмана (см., например, []), дифференциальные операторы, отвечающие многочленам $a^{\pm}(v, x, p)$, записываются так:

$a^+ \left(v, x^2, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad a^- \left(v, x^1, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right).$ — Прим. ред.

потому что по формуле Тейлора для любого многочлена $P: X^* \rightarrow \mathbb{C}$ и любой функции $f: X \rightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} P\left(p + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) &= \sum_{\beta} \frac{1}{\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{\beta} P(p) \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta} f(x) = \\ &= e^{\frac{1}{v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} [P(p) f(x)]. \end{aligned}$$

Отображение $a^- \rightarrow a^+$ определяется, следовательно, соотношением

$$a^+(v, x, p) = e^{\frac{1}{v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} a^-(v, p, x),$$

что и доказывает лемму.

Определение 3.1. Пусть a — дифференциальный оператор, записанный в виде (3.1) и (3.2). Он определен многочленом $a^0\left(\frac{1}{v}, x, p\right)$, удовлетворяющим условиям (3.4). Мы будем говорить, что a есть *дифференциальный оператор, ассоциированный с многочленом a^0* .

Теорема 3.1 дает явное выражение оператора a , преобразованного с помощью $S \in Sp_2(l)$, т. е. SaS^{-1} . В лемме 1.1 это уже было сделано для случая, когда a^0 линейно относительно (x, p) . Доказательство этой теоремы будет опираться на следующие леммы.

Лемма 3.2. Если a и b — операторы, ассоциированные с многочленами a^0 и b^0 , то оператор

$$c = ab$$

ассоциирован с многочленом c^0 , где

$$\begin{aligned} c^0(v, x, p) &= \left\{ e^{\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} e^{-\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle} \times \right. \\ &\quad \left. \times [a^0(v, x, p) b^0(v, y, q)] \right\}_{\substack{y=x \\ q=p}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Доказательство. Если $b^0(v, x, p)$ зависит только от p , то многочлен c^0 , с которым ассоциирован $c = ab$, имеет вид

$$\begin{aligned} c^0(v, x, p) &= e^{-\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} [a^+(v, x, p) b^0(p)] = \\ &= \left\{ e^{-\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle} [a^+(v, x, p) b^0(q)] \right\}_{q=p} = \\ &= \left\{ e^{-\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle} [a^0(v, x, p) b^0(q)] \right\}_{q=p}. \end{aligned}$$

Аналогично, если $b^0(v, x, p)$ зависит только от x , то многочлен, с которым ассоциирован $c = ab$, имеет вид

$$c^0(v, x, p) = \left\{ e^{\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} [a^0(v, x, p) b^0(y)] \right\}_{y=x}.$$

Следовательно, если $b^+(x, p) = b'(x) b''(p)$, то многочлен, ассоциированный с $c = ab$, имеет вид

$$\begin{aligned} c^0(v, x, p) &= e^{-\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle} \left\{ e^{\frac{2}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} \times \right. \\ &\quad \times [a^0(v, x, p) b'(y)] \left. \right\}_{y=x} b''(q) |_{q=p} = \\ &= \left\{ e^{-\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle - \frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle + \frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} \times \right. \\ &\quad \times [a^0(v, x, p) b'(y) b''(q)] \left. \right\}_{\substack{y=x \\ q=p}}. \end{aligned}$$

Но в силу (3.4) $e^{-\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle} [b'(y) b''(q)] = b^0(y, q)$, откуда следует формула (3.5), ч. и т. д.

Очевидное следствие леммы 3.2:

Лемма 3.3. Оператор $c = \frac{1}{2}(ab + ba)$ ассоциирован с многочленом

$$\begin{aligned} c^0(v, x, p) &= \left\{ \text{ch} \left[\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle - \frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle \right] \times \right. \\ &\quad \times [a^0(v, x, p) b^0(v, y, q)] \left. \right\}_{\substack{y=x \\ q=p}}. \end{aligned}$$

Если b линеен относительно (y, q) , то

$$\left[\left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle \right]^2 [a^0(v, x, p) b^0(v, y, q)] = 0$$

и

$$\text{ch}[\dots] a^0 b^0 = a^0 b^0.$$

Отсюда следует

Лемма 3.4. Если b линеен относительно (x, p) , то оператор, ассоциированный с $a^0 b^0$, есть $\frac{1}{2}(ab + ba)$.

Эта лемма позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3.1. Преобразование SaS^{-1} оператора a с помощью автоморфизма S есть дифференциальный оператор, ассоциированный с многочленом $a^0 \circ s^{-1}$ [$S \in Sp_2(l)$; s — образ S в $Sp(l)$].

Доказательство. Пусть b — линейный дифференциальный оператор, ассоциированный с линейным или аффинным многочленом от (x, p) . Лемма 1.1 означает, что для такого опе-

ратора теорема 3.1 верна. Чтобы доказать теорему с помощью индукции по степени a^0 , достаточно доказать следующее: если теорема верна для a^0 , то она верна для $a^0 b^0$.

Пусть теорема верна для a^0 и b^0 . Операторы, ассоциированные с многочленами $a^0 b^0$ и $a^0 b^0 \circ s^{-1} = (a^0 \circ s^{-1})(b^0 \circ s^{-1})$, суть вследствие леммы 3.4 $\frac{1}{2}(ab + ba)$ и $\frac{1}{2}(SaS^{-1}SbS^{-1} + SbS^{-1}SaS^{-1}) = \frac{1}{2}S(ab + ba)S^{-1}$, т. е. теорема верна для $a^0 b^0$, ч. и т. д.

Дополним ее теоремой, относящейся к сопряженным операторам.

Определение 3.2. Напомним, что в $\mathcal{H}(X)$ имеется скалярное произведение $\forall f, g \in \mathcal{H}(X) (f | g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d^l x$ ($\overline{g(x)}$ — комплексно сопряжена к $g(x)$).

Дифференциальные операторы a и b называются *сопряженными*, если

$$\forall f, g \in \mathcal{H}(X) \quad (af, g) = (f, bg). \quad (3.6)$$

Теорема 3.2. Для того чтобы два оператора a и b , ассоциированные с многочленами a^0 и b^0 , были сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall v \in i\mathbb{R}, x \in X, p \in X^*, \quad b^0(v, x, p) = \overline{a^0(v, x, p)}. \quad (3.7)$$

Доказательство. Очевидно, что (3.6) эквивалентно тому, что

$$b^-(v, p, x) = \overline{a^+(v, x, p)}.$$

Так как v — чисто мнимое, то это равенство означает, что

$$e^{-\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} b^0(v, x, p) = e^{-\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} \overline{a^0(v, x, p)},$$

откуда следует (3.7).

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекают очевидные следствия.

Следствие 3.1. Если a^* сопряжено с a , то $\forall S \in Sp_2(l)$ Sa^*S^{-1} сопряжено с SaS^{-1} .

Для дальнейшего важно

Следствие 3.2. Для того чтобы оператор a , ассоциированный с многочленом a^0 , был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы многочлен a^0 принимал действительные значения $\forall v \in i\mathbb{R}, x \in X, p \in X^*$.

§ 2. ИНДЕКСЫ МАСЛОВА; ИНДЕКСЫ ИНЕРЦИИ; ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ И ИХ ОРИЕНТАЦИЯ

0. Введение

Историческое замечание. Следуя Буслаеву [3], [1.1], мы определили в § 1 с помощью формулы (2.15) индекс Маслова $\text{mod } 4$ на $Sp_2(l)$ и с помощью формулы (2.20) указали на его связь с индексом инерции как функцией двух элементов $Sp(l)$. С другой стороны, В. И. Арнольд [1], [11] определил другой индекс Маслова на покрытии лагранжева грассманиана $\Lambda(l)$ пространства $Z(l)$, который связан с предыдущим, и второй индекс инерции — функцию тройки точек $\Lambda(l)$. Ж. М. Суриа [15] дал вариант определения индекса Маслова, который излагается в этом § 2.

Резюме. В § 3 гл. I и в гл. II применяются эти два индекса Маслова и третий индекс инерции — функция элемента $Sp(l)$ и точки $\Lambda(l)$. Мы повторим в удобном для нас виде различные определения этих разных индексов (Арнольд, п. 5, Маслов, п. 6, Буслаев, п. 7), чтобы выяснить их свойства (п. 4, 5, 6, 7, 8). В § 3 будут выделены те свойства, которые применяются в гл. II.

Сначала нам нужно уточнить топологические свойства $Sp(l)$ и $\Lambda(l)$ (теорема 3). Для изучения этих свойств мы будем, следуя Арнольду, применять эрмитову структуру $Z(l)$ (п. 1 и 2).

1. Выбор эрмитовой структуры в $Z(l)$

Пусть $(\cdot | \cdot)$ — скалярное произведение, определяющее на $Z(l)$ эрмитову структуру.

Очевидно,

$$\text{Im}(z | z') = -\text{Im}(z' | z)$$

есть симплектическая структура на $Z(l)$. Но в § 1, п. 1 уже была определена симплектическая структура $[\cdot, \cdot]$ на $Z(l)$.

Лемма 1.1. *Ограничение на X задает гомеоморфизм между множеством эрмитовых структур $(\cdot | \cdot)$ на $Z(l)$, таких, что*

$$\text{Im}(z | z') = [z, z'], \quad iX = X^*, \quad (1.1)$$

и множеством евклидовых структур на X .

Доказательство. i) Ограничение на X эрмитовой структуры $Z(l)$, удовлетворяющей (1.1), есть *евклидова* структура, так как для

$$\forall x, x' \in X \quad [x, x'] = 0.$$

Заметим, что в силу (1.1)

$$(z | z') = [iz, z'] + i[z, z']; \quad (1.2)$$

в частности,

$$\forall x, x' \in X \quad (x | x') = [ix, x']. \quad (1.3)$$

Следовательно,

$$ix = \frac{1}{2} \frac{\partial |x|^2}{\partial x} \in X^*. \quad (1.4)$$

ii) Задание $(\cdot | \cdot)$ на X определяет с помощью формулы (1.4) ограничение i на X

$$i_1: X \rightarrow X^*$$

и также ограничение i на X^*

$$i_2: X^* \rightarrow X, \quad \text{где} \quad i_2 = -i_1^{-1}, \quad \text{так как} \quad i^2 = -1.$$

Следовательно, определен автоморфизм i пространства $Z(l)$:

$$i(x, p) = (i_2 p, i_1 x). \quad (1.5)$$

Отсюда, с помощью формулы (1.2) определяется эрмитова структура в $Z(l)$. Ограничение на X эрмитовых структур $Z(l)$, удовлетворяющих условию (1.1), есть, следовательно, *инъективное* отображение множества этих структур на множество евклидовых структур X .

Это отображение *биективно*. Действительно, автоморфизм i пространства $Z(l)$, определенный заданием скалярного произведения $(\cdot | \cdot)$ на X с помощью формулы (1.5), удовлетворяет условиям

$$i^2 = -1, \quad [iz, z'] = [iz', z], \quad \text{так как} \quad {}^t i_1 = i_1, \quad {}^t i_2 = i_2.$$

Скалярное произведение, определенное на $Z(l)$ формулой (1.2), очевидно, линейно относительно $z \in \mathbb{C}^l$, удовлетворяет условию $(z', z) = \overline{(z', z)}$, является следовательно, билинейным, удовлетворяет условию

$$|x + iy|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

и является, таким образом, эрмитовой структурой.

Следствием леммы 1.1 является

Лемма 1.2. *Множество эрмитовых структур пространства $Z(l)$, удовлетворяющих условию (1.1), есть открытый выпуклый конус. Это множество, следовательно, связно.*

Замечание 1. Мы выбираем произвольно одну из этих эрмитовых структур в $Z(l)$. С помощью этой структуры мы определим топологические понятия (индексы Маслова). В силу леммы 1.2 эти понятия не будут зависеть от выбранной структуры.

2. Лагранжев грассманиан $\Lambda(l)$ в $Z(l)$

Подпространство пространства $Z(l)$ называется изотропным, если ограничение $[\cdot, \cdot]$ на это пространство равно нулю, т. е. в силу (1.1) когда ограничение эрмитовой структуры $Z(l)$ есть евклидова структура этого подпространства.

Всякий ортонормальный репер изотропного подпространства размерности k состоит из ортогональных векторов $Z(l)$. Следовательно, $k \leq l$. Изотропные подпространства максимальной размерности мы будем называть лагранжевскими. Множество таких подпространств $\Lambda(l)$ будем называть лагранжевым грассманианом

$$X \text{ и } X^* \in \Lambda(l).$$

Пусть $\lambda \in \Lambda(l)$; r — ортонормированный репер пространства λ . Тем самым r — репер $Z(l):Z(l)$ (соответственно λ) — состоит из линейных комбинаций векторов этого репера с комплексными (соответственно действительными) коэффициентами.

Обозначим $U(l)$ группу унитарных автоморфизмов u пространства $Z(l)$ (т. е. $uu^* = e$, где $u^* = {}^t\bar{u}$ (${}^t\cdot$ — транспонирование, e — единица). В силу (1.1)

$$U(l) \subseteq Sp(l).$$

Пусть, далее, $\lambda' \in \Lambda(l)$; r' — ортонормальный репер λ' . $U(l)$ содержит единственный элемент u , такой, что

$$r = ur',$$

откуда

$$\lambda = u\lambda'.$$

Это значит, что группа $U(l)$ транзитивно действует на $\Lambda(l)$. То же самое заведомо справедливо для $Sp(l)$. Обозначим $St(l)$ (соответственно $O(l)$) стационарную подгруппу элемента X^* в $Sp(l)$ (соответственно $U(l)$), т. е. подгруппу преобразований s , таких, что $sX^* = X^*$. $O(l)$, очевидно, ортогональная группа.

В лемме 2.3 будут установлены свойства группы $St(l)$. В частности, п. 2 этой леммы покажет, почему стационарная подгруппа X^* интересует нас больше, чем стационарная подгруппа X .

Лемма 2.1. 1)

$$\Lambda(l) = Sp(l)/St(l) = U(l)/O(l). \quad (2.1)$$

2) Обозначим через $W(l)$ множество симметрических элементов w группы $U(l)$ (т. е. таких, что ${}^tw = w$ и, следова-

тельно, $\forall w \in W(l) \quad w = {}^t w = w^{-1}$). Диаграмма

$$\begin{array}{c} U(l) \ni u \mapsto u^t u = w \in W(l) \\ \downarrow \end{array} \quad (2.2)$$

$$U(l)/O(l) = \Lambda(l) \ni \lambda = uX^*$$

определяет естественный гомеоморфизм

$$\Lambda(l) \ni \lambda \mapsto w(\lambda) \in W(l). \quad (2.3)$$

Условие $z \in \lambda$ эквивалентно условию

$$z + w(\lambda) \bar{z} = 0. \quad (2.4)$$

Обозначим $z = x + iy$, где $x, y \in X$.

Предположим, что $1 \notin \text{sp}(w(\lambda))$ ($\text{sp}(w(\lambda))$ это — спектр $w(\lambda)$);

0-цепь единичной окружности S^1), $z \in \lambda$ эквивалентно условию

$$y = i \frac{e + w(\lambda)}{e - w(\lambda)}, \quad (2.5)$$

где $i \frac{e + w(\lambda)}{e - w(\lambda)}$ — симметрическая действительная матрица.

3) $\dim(\lambda \cap \lambda')$ равна кратности значения 1 в $\text{sp}(w(\lambda)w^{-1}(\lambda'))$.

Замечание. Это третье утверждение леммы подготавливает топологическое определение индекса Маслова (п. 5).

Доказательство леммы 2.1 опирается на лемму 2.2, которая есть очевидное следствие выражения $u \in U(l)$ с помощью ее собственных значений и собственных векторов.

Лемма 2.2. 1) Пусть $u \in U(l)$. Для того чтобы $u \in W(l)$, необходимо и достаточно, чтобы у этого преобразования существовали 1 действительных собственных векторов.

2) Всякое сюръективное отображение $F: S^1 \rightarrow S^1$ (S^1 — единичная окружность) определяет сюръективное отображение

$$W(l) \ni w \mapsto F(w) \in W(l).$$

Доказательство леммы 2.1. 2) Диаграмма (2.2) определяет отображение (2.3), потому что, если u и $uv \in U(l)$ имеют один и тот же образ в $\Lambda(l) = U(l)/O(l)$, то $v \in O(l)$; следовательно,

$$uv^t(uv) = uv^t v^t u = u^t u.$$

Если задано $w \in W(l)$, то в силу утверждения 2) леммы 2.2 существует $u \in W(l)$, такое, что $w = u^2$.

Следовательно, $w = u^t u$ и отображение (2.3) сюръективно. Так как $\lambda = uX^*$, где $u \in U(l)$, условие $z \in \lambda$ означает, что $u^{-1}z \in X^*$ т. е. $\text{Re}(u^{-1}z) = 0$, или $u^{-1}z + \bar{u}^{-1}\bar{z} = 0$, т. е. $z + w\bar{z} = 0$.

Следовательно, отображение (2.3) инъективно.

3) Положим $w = w(\lambda)$, $w' = w(\lambda')$; уравнения $\lambda \cap \lambda'$ можно написать в виде

$$z + w\bar{z} = 0, \quad z + w'\bar{z} = 0,$$

или в эквивалентном виде

$$\lambda \cap \lambda': w^{-1}z = w'^{-1}z; \quad z = -w\bar{z}.$$

Обозначим через T аналитическое подпространство $Z(l)$ с уравнением

$$T: w^{-1}z = w'^{-1}z; \quad \dim_c T = k.$$

Комплексная размерность $\dim_c T = k$, где k — порядок кратности 1 в $\text{sp}(ww'^{-1})$. Уравнение $\lambda \cap \lambda'$ в T имеет вид

$$z + w\bar{z} = 0.$$

В силу утверждения 2) леммы 2.2 существует $u \in W(l)$, такое, что

$$-w = \bar{u}^2 = u^{-1}\bar{u},$$

и уравнение $\lambda \cap \lambda'$ в T можно написать в виде

$$uz = \bar{u}\bar{z}.$$

Изоморфизм

$$T \ni z \mapsto uz \in \mathbb{C}^k$$

отображает, следовательно, $\lambda \cap \lambda'$ на действительное подпространство $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{C}^k$. Отсюда следует, что

$$\dim_r \lambda \cap \lambda' = k.$$

Лемма 2.3. *Стационарная подгруппа $St(l)$ подпространства X^* в $Sp(l)$ обладает следующими свойствами:*

1) элементы $s \in St(l)$ определяются так: $s(x', p') = (x, p)$ эквивалентно условиям

$$x = s_1 x'; \quad p = {}^t s_1^{-1} (p' + s_2 x'), \quad (2.6)$$

где s_1 — произвольный автоморфизм X , $s_2 = {}^t s_2$ — произвольный симметрический морфизм $X \rightarrow X^*$.

2) Этот элемент $s \in St(l)$ есть проекция двух элементов $S \in Sp_2(l)$, заданных условием

$$(Sf)(x) = \sqrt{\det s_1^{-1}} \left[e^{\frac{v}{2} \langle x', s_2 x' \rangle} f(x') \right]_{x' = s_1^{-1} x}. \quad (2.7)$$

Замечание 2.1. Обозначим через $St_2(l)$ подгруппу $Sp_2(l)$, проекция которой на $Sp(l)$ есть $St(l)$.

В силу замечания 2.5 § 1 $St_2(l)$ есть множество $S \in Sp_2(l)$, которые поточечно преобразуют элементы $\mathcal{P}(X)$:

значение Sf в точке $x \in X$ зависит только от поведения f в точке $x' \in X$ (даже просто от значения f в точке x').

Доказательство. 1) Элементы стационарной подгруппы X^* в группе автоморфизмов векторного пространства $Z(l)$ — это отображения $(x', p') \mapsto (x, p)$, определенные соотношениями

$$x = s_1 x'; \quad p = s_* (p' + s_2 x'),$$

где s_1 и s_* — автоморфизмы X и X^* , s_2 — морфизм $X \mapsto X^*$. Эти элементы принадлежат $Sp(l)$, когда $s_* = {}^t s_1^{-1}$, $s_2 = {}^t s^2$.

2) Формула (2.7) определяет автоморфизм S пространства $\mathcal{P}'(X)$, который принадлежит $Sp_2(l)$ в силу замечания 2.4 § 1. Очевидно, справедливы равенства

$$x \cdot (Sf) = S[f \cdot s_1 x'], \quad \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} (Sf) = S \left[{}^t s_1^{-1} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x'} + s_2 x' \right) f \right].$$

Следовательно, для любого $a \in \mathcal{A}$ (§ 1, п. 1)

$$a^0 \left(x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) (Sf) = S a^0 \left(s_1 x', {}^t s_1^{-1} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x'} + s_2 x' \right) \right) f;$$

т. е. в силу (2.6)

$$S^{-1} a S \text{ ассоциировано с } a^0 \circ s.$$

Это значит, что s есть естественный образ в $Sp(l)$ элементов $\pm S \in Sp_2(l)$.

3. Накрытия $Sp(l)$ и $\Lambda(l)$

Свойства этих накрытий вытекают из свойств $\pi_1[Sp(l)]$ и $\pi_1[\Lambda(l)]$, которые мы установим, изучив $\pi_1[U(l)]$.

Через π_k обозначим k -мерную группу гомотопий (см. Стинрод [17]. Заметим, что определение «симплектических групп», данное в [17], не совпадает с нашим).

Лемма 3.1. 1) Вложение $O(l) \subset St(l)$ индуцирует изоморфизм

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \pi_k [O(l)] \simeq \pi_k [St(l)].$$

2) Вложение $U(l) \subset Sp(l)$ индуцирует изоморфизм

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \pi_k [U(l)] \simeq \pi_k [St(l)].$$

3) Морфизм

$$\pi_1 [U(l)] \ni \gamma \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(\det u)}{\det u} \in \mathbf{Z} \quad (3.1)$$

задает естественный изоморфизм

$$\pi_1 [U(l)] \simeq \mathbf{Z}.$$

Доказательство. 1) Элементы $s \in St(l)$ имеют вид (2.6). Те из них, для которых $s_2 = 0$, образуют подгруппу $GL(l)$ группы $St(l)$. Вложения

$$O(l) \subset GL(l) \subset St(l)$$

индуцируют естественные морфизмы

$$\pi_k [O(l)] \xrightarrow{i} \pi_k [GL(l)] \rightarrow \pi_k [St(l)],$$

из которых второй морфизм есть изоморфизм, потому что

$$St(l) = GL(l) \times \mathbf{R}^n, \quad \text{где} \quad n = \frac{l(l+1)}{2}.$$

Осталось, следовательно, доказать, что i — изоморфизм.

Группа $GL(l)$ транзитивно действует на множестве Q_+ положительно определенных квадратичных форм на X ; группа $O(l)$ есть стационарная подгруппа одной из них. Следовательно,

$$GL(l)/O(l) = Q_+, \quad \text{где } Q_+ \text{ выпукло.}$$

Точность гомотопической последовательности этого расслоения (Стинрод [17], 17.3, 17.4) доказывает, что i — действительно изоморфизм.

2) Вложения

$$U(l) \subset Sp(l); \quad St(l) \cap U(l) = O(l) \subset St(l)$$

определяют отображения расслоений (см. Стинрод [17], (17.5))

$$U(l)/O(l) = \Lambda(l) \quad \text{в} \quad Sp(l)/St(l) = \Lambda(l).$$

Ограничение этого отображения на $\Lambda(l)$ есть тождество. Это отображение индуцирует морфизм гомотопических последовательностей этих расслоений (см. Стинрод [17], (17.3), (17.11), (17.5)):

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{k+1}[\Lambda(l)] & \xrightarrow{\Delta'} & \pi_k[O(l)] & \xrightarrow{i'} & \pi_k[U(l)] & \xrightarrow{p'} & \pi_k[\Lambda(l)] \dots \pi_0[O(l)] \\ \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 \\ \pi_{k+1}[\Lambda(l)] & \xrightarrow{\Delta} & \pi_k[St(l)] & \xrightarrow{i} & \pi_k[Sp(l)] & \xrightarrow{p} & \pi_k[\Lambda(l)] \dots \pi_0[St(l)]. \end{array}$$

Эта диаграмма, строки которой точны, является поэтому коммутативной. Отображения i_0 — изоморфизмы. Следовательно, отображения i_1 — тоже изоморфизмы.

3) Это утверждение леммы доказано другим способом у Стинрода [17], 25.2. Обозначим $\det$ (т. е. — детерминант) эпиморфизм

$$U(l) \ni u \mapsto \det u \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}. \quad (3.2)$$

Ядро этого эпиморфизма обозначим $SU(l)$; $u \in SU(l)$, если $\det u = 1$. Мы имеем, следовательно,

$$U(l)/SU(l) = S^1.$$

Отображение (3.2) — естественная проекция $U(l)$ на S^1 . Гомотопическая последовательность этого расслоения, которая является точной, содержит отображения

$$\pi_1[SU(l)] \xrightarrow{i} \pi_1[U(l)] \xrightarrow{p} \pi_1[S^1] \xrightarrow{\Delta} \pi_0[SU(l)]. \quad (3.3)$$

Отображение p индуцировано морфизмом (3.2); группа $SU(l)$ — связна, поэтому $\pi_0[SU(l)]$ тривиальна. Определим $\pi_1[SU(l)]$. Группа $SU(l)$ транзитивно действует на сфере

$$S^{2l-1}: |z| = 1.$$

Стационарная подгруппа вектора $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^l$ есть $SU(l-1)$. Поэтому

$$SU(l)/SU(l-1) = S^{2l-1}.$$

Точная гомотопическая последовательность этого расслоения содержит отображения

$$\pi_2[S^{2l-1}] \xrightarrow{\Delta'} \pi_1[SU(l-1)] \xrightarrow{i'} \pi_1[SU(l)] \xrightarrow{p'} \pi_1[S^{2l-1}],$$

где при $l \geq 2$ $\pi_1[S^{2l-1}]$ и $\pi_2[S^{2l-1}]$ тривиальны (см. Стинрод [17], 21.2). Следовательно, отображение i' есть изоморфизм. Но группа $\pi_1[SU(1)]$ тривиальна, так как сама $SU(1)$ тривиальна. Следовательно,

$$\pi_1[SU(l)] \text{ тривиальна.} \quad (3.4)$$

Возвращаясь к последовательности (3.3), получаем отсюда, что отображение p есть изоморфизм. Но отображение

$$\pi_1[S^1] \ni \Gamma \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}$$

также есть изоморфизм. Композиция p с этим изоморфизмом есть изоморфизм $\pi_1[U(l)] \rightarrow \mathbb{Z}$, определенный формулой (3.1).

Лемма 3.2. 1) Композиция естественного изоморфизма (см 2.3)

$$\pi_1[\Lambda(l)] \simeq \pi_1[W(l)]$$

и морфизма

$$\pi_1[W(l)] \ni \gamma \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(\det w)}{\det w} \in \mathbb{Z} \quad (3.5)$$

определяет естественный морфизм

$$\pi_1 [\Lambda(l)] \simeq \mathbb{Z},$$

который является естественным изоморфизмом (Арнольд [1]).

2) Расслоение $Sp(l)/St(l) = \Lambda(l)$ определяет мономорфизм

$$p: \mathbb{Z} \simeq \pi_1 [Sp(l)] \rightarrow \pi_1 [\Lambda(l)] \simeq \mathbb{Z}, \quad (3.6)$$

который состоит в умножении элементов $\mathbb{Z}$ на 2.

Доказательство. 1) Естественный гомеоморфизм (2.3) позволяет определить

$$\det \lambda = \det w \in S^1. \quad (3.7)$$

Очевидно, что отображение

$$\Lambda(l) \ni \lambda \mapsto \det \lambda \in S^1 \quad (3.8)$$

есть эпиморфизм. В силу (2.2) имеем

$$\det \lambda = \det^2 u, \quad \text{если } \lambda = uX.$$

Следовательно, для любого $u \in U(l)$

$$\det(u\lambda) = \det^2 u \cdot \det \lambda. \quad (3.9)$$

Отображение (3.8) определяет, следовательно, расслоение

$$\Lambda(l)/S\Lambda(l) = S^1,$$

где через $S\Lambda(l)$ обозначено подмногообразие $\Lambda(l)$, определенное уравнением

$$S\Lambda(l): \det w = 1.$$

Группа $U(l)$ действует на слои этого расслоения.

Рассмотрим часть точной гомотопической последовательности этого расслоения:

$$\pi_1 [S\Lambda(l)] \xrightarrow{i} \pi_1 [\Lambda(l)] \xrightarrow{p} \pi_1 [S^1]. \quad (3.10)$$

Так как отображение p в (3.10) индуцировано

$$\det: W(l) \rightarrow S^1,$$

то p есть эпиморфизм.

Определим $\pi_1 [S\Lambda(l)]$. Группа $SU(l)$ транзитивно действует на $S\Lambda(l)$; $X^* \in S\Lambda(l)$. Стационарная подгруппа X^* в $SU(l)$ есть $SO(l)$ — связная компонента единичного элемента $O(l)$. Следовательно, существует расслоение

$$SU(l)/SO(l) = S\Lambda(l).$$

Часть точной последовательности этого расслоения имеет вид

$$\pi_1[SU(l)] \xrightarrow{p'} \pi_1[SL(l)] \xrightarrow{\Delta'} \pi_0[SO(l)],$$

где группы $\pi_1[SU(l)]$ и $\pi_0[SO(l)]$ тривиальны — первая, в силу (3.4), вторая в силу связности $SO(l)$. Следовательно, $\pi_1[SL(l)]$ тоже тривиальна и в последовательности (3.10) отображение p является изоморфизмом. Этот изоморфизм индуцирован отображением (3.8). Рассмотрев композицию этого отображения с изоморфизмом

$$\pi_1[S^1] \ni \Gamma \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z},$$

мы получаем изоморфизм $\pi_1[\Lambda(l)] \rightarrow \mathbb{Z}$, определенный формулой (3.5).

2) В формуле (3.6) изоморфизм $\mathbb{Z} \simeq \pi_1[Sp(l)]$ есть композиция изоморфизмов, определенных в п. 2) и 3) леммы 3.1. Изоморфизм $\pi_1[\Lambda(l)] \simeq \mathbb{Z}$ есть композиция изоморфизма (3.5) и того изоморфизма, который индуцирован гомеоморфизмом $\Lambda(l)$ и $W(l)$. Чтобы доказать утверждение 2) леммы 3.2 достаточно, следовательно, доказать, что расслоение

$$U(l)/O(l) = W(l)$$

индуцирует морфизм

$$p: \mathbb{Z} \simeq \pi_1[U(l)] \rightarrow \pi_1[W(l)] \simeq \mathbb{Z}, \quad (3.11)$$

состоящий в умножении целых чисел на 2.

Это расслоение определено отображением

$$U(l) \ni u \mapsto w = u^t u,$$

которое, очевидно, удовлетворяет условию

$$\det w = (\det u)^2.$$

Поскольку изоморфизмы, стоящие слева и справа в (3.11) определены формулами (3.1) и (3.5), мы имеем, следовательно,

$$p: \mathbb{Z} \ni \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(\det u)}{\det u} \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(\det u)^2}{(\det u)^2} \in \mathbb{Z},$$

т.е. отображение $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ действительно есть умножение на 2.

Из двух доказанных лемм непосредственно следует теорема, не зависящая, как легко видеть, от выбранной эрмитовой структуры $Z(l)$.

Обозначим через α и β образующие групп $\pi_1[Sp(l)]$ и $\pi_1[\Lambda(l)]$, т.е. образы в этих группах $1 \in \mathbb{Z}$.

Теорема 3.

1) $Sp(l)$ имеет единственное накрытие $Sp_q(l)$ порядка q ($q = 1, 2, \dots, \infty$), т. е. накрытие, число точек которого, имеющих одну и ту же проекцию на $Sp(l)$, равно q . α действует на $Sp_q(l)$. α^r действует на $Sp_q(l)$ тождественно тогда и только тогда, когда $r = 0 \pmod{q}$.

2) $\Lambda(l)$ имеет единственное накрытие $\Lambda_q(l)$ порядка q . β действует на $\Lambda_q(l)$. β^r действует на $\Lambda_q(l)$ тождественно тогда и только тогда, когда $r = 0 \pmod{q}$.

3) $Sp_q(l)$ транзитивно действует на $\Lambda_{2q}(l)$,
 $(\alpha S_q) \lambda_{2q} = S_q (\beta^2 \lambda_{2q}) = \beta^2 (S_q \lambda_{2q})$, где $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(l)$, $S_q \in Sp_q(l)$.
 (3.12)

Пример 3.1. $\Lambda_2(l)$ есть множество подпространств лагранжевых и ориентированных (в смысле Евклида). $Sp_2(l)$ действует на $\Lambda_2(l)$.

Пример 3.2. $Sp_2(l)$ действует на $\Lambda_4(l)$; этот результат существен для теории асимптотических разложений (гл. II).

Обозначения 3.

s означает проекцию на $Sp(l)$ элемента $S \in Sp_q(l)$;

λ означает проекцию на $\Lambda(l)$ элемента $\lambda_q \in \Lambda_q$;

λ_2 означает проекцию на $\Lambda_2(l)$ элемента $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(l)$;

e — единица $Sp(l)$, E — единица $Sp_q(l)$. Мы выберем элемент $X_\infty^* \in \Lambda_\infty(l)$, проектирующийся в $X^* \in \Lambda(l)$. Через X_q^* обозначим его проекцию в $\Lambda_q(l)$.

4. Индексы инерции

Дадим определение индекса инерции $\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'')$ тройки элементов $(\lambda, \lambda', \lambda'') \in \Lambda_q(l)$, которые попарно трансверсальны. Мы имеем

$$\lambda \oplus \lambda' = \lambda' \oplus \lambda'' = \lambda'' \oplus \lambda = Z(l).$$

Условия

$$z \in \lambda, \quad z' \in \lambda', \quad z'' \in \lambda'', \quad z + z' + z'' = 0 \quad (4.1)$$

определяют три изоморфизма

$$\begin{array}{ccc} & z \in \lambda & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \lambda'' \ni z'' & & z' \in \lambda' \end{array} \quad (4.2)$$

композиция которых есть тождественное преобразование. В силу (4.1)

$$[z, z'] = [z', z''] = [z'', z]. \quad (4.3)$$

Это число есть значение квадратичной формы в точке $z \in \lambda$ (или $z' \in \lambda'$, или $z'' \in \lambda''$); изоморфизмы (4.2) переводят эти формы друг в друга. Следовательно, они имеют один и тот же индекс инерции. Он будет обозначаться

$$\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'').$$

Лемма. Квадратичная форма

$$\lambda \ni z \mapsto [z, z'] \in \mathbb{R}$$

не вырождена (т. е. не имеет нулевого собственного значения).

Доказательство. Пусть другая тройка $\zeta \in \lambda$, $\zeta' \in \lambda'$, $\zeta'' \in \lambda''$ такова, что $\zeta + \zeta' + \zeta'' = 0$.

Так как λ , λ' и λ'' — лагранжевы, билинейная форма

$$(z, \zeta) \mapsto [z, \zeta'] = [\zeta', z''] = [z'', \zeta] = [\zeta, z'] = [z', \zeta''] = [\zeta'', z]$$

симметрична и представляет собой, следовательно, полярную форму квадратичной формы

$$z \mapsto [z, z'].$$

Если бы эта квадратичная форма была вырождена, то существовал бы вектор $z \neq 0$, такой, что $z \in \lambda$, $\forall \zeta' \in \lambda'$ $[z, \zeta'] = 0$, т. е. $z \in \lambda \cap \lambda'$, что противоречит гипотезе о трансверсальности λ и λ' .

$\text{Inert}(\cdot, \cdot, \cdot)$ обладает следующими свойствами:

$$\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = \text{Inert}(\lambda', \lambda'', \lambda) = l - (\lambda, \lambda'', \lambda'). \quad (4.4)$$

$\text{Inert}(\cdot, \cdot, \cdot)$, определенный, когда его аргументы попарно трансверсальны, есть локально постоянная функция на своей области определения

$$\forall s \in \text{Sp}(l) \quad \text{Inert}(s\lambda, s\lambda', s\lambda'') = \text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda''). \quad (4.5)$$

В гл. I, § 1 был с помощью формул (2.11) и (2.14) определен $\text{Inert}(s, s', s'')$ для

$$s, s', s'' \in \text{Sp}(l) \setminus \Sigma_{\text{Sp}}, \quad ss's'' = e. \quad (4.6)$$

Между этими двумя индексами инерции существует следующая связь:

Теорема 4.1. При условии (4.6) справедливо равенство

$$\text{Inert}(s, s', s'') = \text{Inert}(sX^*, X^*, s''^{-1}X^*). \quad (4.7)$$

Замечание 4.1. Условие $s \in \Sigma_{\text{Sp}}$ эквивалентно тому, что sX^* и X^* не трансверсальны.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями гл. I, § 1, п. 2, точнее леммы 2.3, и положим

$$s = s_A, \quad s' = s_{A'}, \quad s'' = s_{A''};$$

$s_A: (x', p') \mapsto (x, p)$ означает $p = Px - {}^t Lx'$, $p' = Lx - Qx'$,

$s_{A''}: (x, p) \mapsto (x'', p'')$ означает $p'' = P''x'' - {}^t L''x$, $p = L''x'' - Q''x$.

Уравнения подпространств

$$\lambda = sX^*, \quad \lambda' = X^*, \quad \lambda'' = s''^{-1}X^*$$

будут, следовательно, иметь вид

$$\lambda: p = Px; \quad \lambda': x' = 0; \quad \lambda'': p'' = -Q''x''.$$

Условие (4.1)

$$z = (x, p) \in \lambda; \quad z'' = (x'', p'') \in \lambda''; \quad z + z'' \in \lambda$$

запишется тогда так:

$$z = (x, Px), \quad z'' = (-x, Q''x).$$

Отсюда $[z'', z] = \langle (P + Q'')x, x \rangle$. Следовательно, в силу определения (2.14) § 1

$$\begin{aligned} \text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') &= \text{Inert}(P + Q'') = \text{Inert}_x(A + A' + A'') = \\ &= \text{Inert}(s, s', s''). \end{aligned}$$

Следующие две леммы дадут выражение индекса инерции через индекс Кронеккера (К.И). Когда в п. 5 будет определен индекс Маслова, через индекс Кронеккера из этих лемм будет выведена связь между индексами инерции и индексом Маслова (см. далее лемму 6.1).

Лемма 4.1. *Группа $Sp(l)$ транзитивно действует на парах трансверсальных элементов $\Lambda(l)$.*

Замечание 4.2. Отсюда следует, что любая тройка попарно трансверсальных элементов $\Lambda(l)$ имеет вид $(s\lambda, sX, sX^*)$; напомним, что

$$\text{Inert}(s\lambda, sX, sX^*) = \text{Inert}(\lambda, X, X^*).$$

Доказательство. Так как $Sp(l)$ транзитивно действует на $\Lambda(l)$, достаточно доказать, что стационарная подгруппа $X^* St(l)$ транзитивно действует на элементах $\Lambda(l)$, трансверсальных к X^* .

Элемент $s \in St(l)$, определенный формулой (2.6) (стр. 35), преобразует $X: p' = 0$ в $sX: p = {}^t s_1^{-1} s_2 s_1^{-1} x$, где $s_2: X \rightarrow X^*$ — симметрическое преобразование. Таким образом, условие,

чтобы $p = s_3 x$ определяло элемент Λ , очевидно, таково: $s_3: X \rightarrow X^*$ симметрично.

Обозначение 4.1. Напомним, что $\text{sp } u$, спектр u , есть некоторая 0-цепь на S^1 . Обозначим

$$\text{sp } (\lambda) = \text{sp } (w), \quad (4.8)$$

где w есть образ λ при естественном гомеоморфизме (2.3). Обозначим $(\exp i\vartheta)$ точку S^1 с аффиксом $\exp i\vartheta$ ($\vartheta \in \mathbb{R}$) и $l(\exp i\vartheta)$ 0-цепь, состоящую из l экземпляров этой точки ($l \in \mathbb{Z}$).

Мы имеем, например,

$$\text{sp } X^* = \text{sp } (e); \quad \text{sp } X = \text{sp } (-e); \quad \text{sp } (e) = l(1); \quad \text{sp } (-e) = l(-1). \quad (4.9)$$

Обозначим σ некоторую 1-цепь на S^1 , $|\sigma|$ — ее носитель, $\partial\sigma$ — ее границу и К.И — индекс Кронекера (см. Лефшец [9] или любую теорию пересечения цепей).

Напомним, что К.И $[\sigma_1, \sigma_0] \in \mathbb{Z}$

определен, когда σ_1 и σ_0 есть 1-цепь и 0-цепь S^1 , такие, что $|\sigma_0| \cap |\partial\sigma_1| = \emptyset$;

линеен по σ_0 и σ_1 ;

равен 1, если σ_0 — точка, а σ_1 — дуга с положительной ориентацией, внутри которой лежит σ_0 ;

справедливо равенство К.И. $[\sigma_1, \partial\sigma'_1] = -\text{К.И.}[\sigma'_1, \partial\sigma_1]$.

Лемма 4.2. Пусть σ и σ^* две 1-цепи S^1 , такие, что

$$\partial\sigma = \text{sp } (\lambda) - \text{sp } (X^*); \quad \partial\sigma^* = \text{sp } (\lambda) - \text{sp } X, \quad (4.10)$$

$\sigma - \sigma^*$ принадлежит полуокружности S^1 , на которой $\text{Im } z \geq 0$. (4.11)

Тогда

$$\text{Inert } (\lambda, X, X^*) = \text{К.И.} [\sigma, (-1)] - \text{К.И.} [\sigma^*, (1)]. \quad (4.12)$$

Замечание 4.3. Это разложение инерции будет применяться в лемме 5.1.

Доказательство. Пусть $z = x + iy \in \lambda$, $z' \in X$, $z'' \in X^*$ таковы, что $z + z' + z'' = 0$; $x, y \in X$. Очевидно, что тогда

$$z' = -x, \quad z'' = -iy;$$

$$[z', z''] = \text{Im } (z' | z'') = -(x | y).$$

Пусть w — образ λ при отображении (2.3). В силу (2.5)

$$y = i \frac{e + w}{e - w} x \quad (e — тождественное преобразование).$$

Так как ω унитарно и симметрично, $i \frac{e + \omega}{e - \omega}$ действительно и симметрично. Следовательно, $\text{Inert}(\lambda, X, X^*)$ есть индекс инерции квадратичной формы

$$X \ni x \mapsto - \left(x \left| i \frac{e + \omega}{e - \omega} x \right. \right) \in \mathbb{R},$$

т. е. число положительных собственных значений действительной симметрической матрицы $i \frac{e + \omega}{e - \omega}$.

Но положительная действительная полуось есть образ полуокружности S^1 , где $\text{Im } z \leq 0$ при преобразовании

$$S^1 \ni (\exp i\vartheta) \mapsto i \frac{1 + \exp i\vartheta}{1 - \exp i\vartheta} \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

Зададим на этой полуокружности положительную ориентацию. Тогда она станет цепью χ на S^1 . Отображение (4.13) преобразует собственные значения ω в собственные значения $i \frac{e + \omega}{e - \omega}$; следовательно,

$$\text{Inert}(\lambda, X, X^*) = \text{K. I.} [\chi, \text{sp } \omega].$$

Пусть, далее, τ есть цепь S^1 с границей

$$\partial \tau = \text{sp } (\omega) - \text{sp } (ie),$$

$$\begin{aligned} \text{Inert}(\lambda, X, X^*) &= \text{K. I.} [\chi, \partial \tau] = - \text{K. I.} [\tau, \partial \chi] = \\ &= \text{K. I.} [\tau, (-1)] - \text{K. I.} [\tau, (1)]. \end{aligned}$$

Пусть σ и σ^* — 1-цепи S^1 , такие, что

$$\partial(\sigma - \tau) = \text{sp } (ie) - \text{sp } (e),$$

$$\sigma - \tau \text{ лежит на дуге } \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset S^1 = \{\exp i\vartheta\},$$

$$\partial(\sigma^* - \tau) = \text{sp } (ie) - \text{sp } (e),$$

$$\sigma^* - \tau \text{ лежит на дуге } \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \subset S^1 = \{\exp i\vartheta\}.$$

Так как

$$\text{K. I.} [\sigma - \tau, (-1)] = \text{K. I.} [\sigma^* - \tau, (1)] = 0,$$

то предыдущее выражение $\text{Inert}(\lambda, X, X^*)$ эквивалентно (4.12). Но σ и σ^* удовлетворяют условиям (4.10) и (4.11). Эти условия определяют их с точностью до 1-циклов γ и γ^* окружности S^1 , таких, что $\gamma - \gamma^*$ принадлежит полуокружности S^1 , на которой $\text{Im } z > 0$. Следовательно, γ и γ^* гомологичны. Откуда

$$\text{K. I.} [\gamma, (-1)] = \text{K. I.} [\gamma^*, (1)].$$

Следовательно, (4.12) справедливо для любой пары σ и σ^* , удовлетворяющей условиям (4.10) и (4.11).

5. Индекс Маслова m на $\Lambda_\infty^2(l)$

Ниже будет *уточнено* определение Арнольда [1]. Нам понадобятся следующие предварительные определения.

Определение 5.1. *Индекс M на $\Lambda_\infty^4(l)$.* Обозначим через (v_∞, v'_∞) элемент $\Lambda_\infty(l) \times \Lambda_\infty(l) = \Lambda_\infty^2(l)$, т. е. пару элементов $\Lambda_\infty(l)$. Пусть v и $w(v)$ — естественные образы в $\Lambda(l)$ и $W(l)$ (см. (2.3)); v' и $w' = w(v')$ — аналогичные образы v'_∞ . В силу п. 3) леммы 2.1 трансверсальность v и v' означает, что

$$(1) \notin \text{sp}(w, w'^{-1}).$$

$\text{sp}(w, w'^{-1})$, который мы обозначим $\text{sp}(v, v')$, есть O -цепь в S^1 (см. Лефшец [9]). Отображение

$$\Gamma \ni (v_\infty, v'_\infty) \mapsto \text{sp}(v, v')$$

отображает дугу Γ на 1-цепь S^1 , которую мы обозначим $\text{sp}(\Gamma)$. Если

$$\partial\Gamma = (\lambda_\infty, \lambda'_\infty) - (\mu_\infty, \mu'_\infty),$$

то

$$\partial \text{sp}(\Gamma) = \text{sp}(\lambda, \lambda') - \text{sp}(\mu, \mu').$$

Предположим, что

$$\lambda \text{ и } \lambda' \text{ трансверсальны; } \mu \text{ и } \mu' \text{ трансверсальны.} \quad (5.1)$$

Тогда в силу п. 3) леммы 2.1

$$(1) \notin |\partial \text{sp}(\Gamma)|,$$

т. е. определен $K.I[\text{sp}(\Gamma), [1]]$. Это целое число, зависящее только от гомотопического класса Γ , т. е. от $\partial\Gamma$. Мы обозначим это число

$$M[\lambda_\infty, \lambda'_\infty; \mu_\infty, \mu'_\infty] = K.I[\text{sp}(\Gamma), (1)] \in \mathbb{Z}. \quad (5.2)$$

Замечание 5.1. В силу замечания 1 M не зависит от выбора эрмитовой структуры $Z(l)$, которой мы пользовались при его определении.

Свойства M . M определено при условии (5.1). M локально постоянно на своей области определения. M обладает очевидным аддитивным свойством

$$\begin{aligned} M[\lambda_\infty, \lambda'_\infty; \mu_\infty, \mu'_\infty] + M[\mu_\infty, \mu'_\infty; v_\infty, v'_\infty] = \\ = M[\lambda_\infty, \lambda'_\infty; v_\infty, v'_\infty], \end{aligned} \quad (5.3)$$

из которого следует, что

$$M[\lambda_\infty, \lambda'_\infty; \lambda_\infty, \lambda'_\infty] = 0. \quad (5.4)$$

M обладает свойством инвариантности

$$\forall S \in Sp_{\infty}(l) \quad M[S\lambda_{\infty}, S\lambda'_{\infty}; \mu_{\infty}, \mu'_{\infty}] = \\ = M[\lambda_{\infty}, \lambda'_{\infty}; \mu_{\infty}, \mu'_{\infty}]. \quad (5.5)$$

Если β есть образующая группы $\pi_1[\Lambda(l)]$ (см. определение 3):

$$\forall r, r' \in \mathbb{Z} \quad M[\beta^r \lambda_{\infty}, \beta^{r'} \lambda'_{\infty}; \mu_{\infty}, \mu'_{\infty}] = \\ = M[\lambda_{\infty}, \lambda'_{\infty}; \mu_{\infty}, \mu'_{\infty}] + r - r'. \quad (5.6)$$

Доказательство (5.5). Если λ и λ' трансверсальны, то $s\lambda$ и $s\lambda'$ тоже трансверсальны. Отображение

$$Sp_{\infty}(l) \ni S \mapsto M[S\lambda_{\infty}, S\lambda'_{\infty}; \mu_{\infty}, \mu'_{\infty}] \in \mathbb{Z}$$

определено и локально постоянно. Следовательно, это константа, так как $Sp_{\infty}(l)$ — связное множество.

Доказательство (5.6). Выберем кривую Γ дифференцируемой и такой, что

$$\partial\Gamma = (\beta^r \lambda_{\infty}, \beta^{r'} \lambda'_{\infty}; \lambda_{\infty}, \lambda'_{\infty}).$$

Очевидно, что можно определить l непрерывных функций

$$\vartheta_j: \Gamma \ni (v_{\infty}, v'_{\infty}) \mapsto \vartheta_j(v_{\infty}, v'_{\infty}) \in \mathbb{R} \quad (j = 1, \dots, l),$$

таких, что

$$sp(v, v') = \sum_j (\exp i\vartheta_j); \quad \vartheta_j(\beta^r \lambda_{\infty}, \beta^{r'} \lambda'_{\infty}) = \vartheta_j(\lambda_{\infty}, \lambda'_{\infty}) \pmod{2\pi}.$$

Определение (5.2) индекса M в силу (3.5) и определения 3 дает

$$M[\beta^r \lambda_{\infty}, \beta^{r'} \lambda'_{\infty}; \lambda_{\infty}, \lambda'_{\infty}] = \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\vartheta_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\left(\sum_j \vartheta_j\right) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d(\det(w w'^{-1}))}{\det(w w'^{-1})} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d(\det w)}{\det w} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d(\det w')}{\det w'} = r - r'.$$

Отсюда и из аддитивного свойства (5.3) получаем (5.6).

Чтобы оказаться в условиях гипотезы (4.11) леммы 4.2, дадим следующие определения.

Определение 5.2. X_{∞} есть точка $\Lambda_{\infty}(l)$, которая проектируется в $X \in \Lambda(l)$ и которую можно соединить с X_{∞}^* дугой $\gamma \in \Lambda_{\infty}(l)$, такой, что $sp(\gamma)$ лежит на полуокружности S^1 , на которой $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Определение 5.3. Индекс Маслова есть функция m , определенная формулой

$$m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) = M(\lambda_\infty, \lambda'_\infty; X_\infty^*, X_\infty).$$

Это определение позволяет следующим образом сформулировать лемму 4.2.

Лемма 5.1. Для всякой тройки $\lambda_\infty, \lambda'_\infty, \lambda''_\infty$ элементов $\Lambda_\infty(l)$ справедливо равенство

$$\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) - m(\lambda_\infty, \lambda''_\infty) + m(\lambda'_\infty, \lambda''_\infty). \quad (5.7)$$

Доказательство. В силу (5.6) правая часть формулы (5.7) зависит только от $\lambda, \lambda', \lambda''$; в силу замечания (4.2) и свойства инвариантности (5.5) достаточно установить следующий частный случай формулы (5.7):

$$\text{Inert}(\lambda, X, X^*) = m(\lambda_\infty, X_\infty) - m(\lambda_\infty, X_\infty^*) + m(X_\infty, X_\infty^*). \quad (5.8)$$

Определение 5.3 функции m и аддитивное свойство (5.3) функции M дают

$$m(\lambda_\infty, X_\infty) = M[\lambda_\infty, X_\infty; X_\infty^*, X_\infty];$$

$$m(\lambda_\infty, X_\infty^*) - m(X_\infty, X_\infty^*) = M[\lambda_\infty, X_\infty^*; X_\infty, X_\infty^*].$$

Определение 5.1 этих двух значений M использует две линии Γ и Γ^* из $\Lambda^2(l)$, такие, что

$$\partial\Gamma = (\lambda_\infty, X_\infty) - (X_\infty^*, X_\infty); \quad \partial\Gamma^* = (\lambda_\infty, X_\infty^*) - (X_\infty, X_\infty^*).$$

Выберем в качестве этих линий декартовы произведения:

$$\Gamma: \gamma \times X_\infty, \quad \Gamma^*: \gamma^* \times X_\infty^*,$$

где γ и γ^* — линии в $\Lambda(l)$, такие, что

$$\partial\gamma = \lambda_\infty - X_\infty^*; \quad \partial\gamma^* = \lambda_\infty - X_\infty.$$

Мы имеем, следовательно,

$$\partial(\gamma - \gamma^*) = X_\infty - X_\infty^*.$$

Согласно определению 5.2, для X_∞ можно выбрать γ и γ^* так, что $\text{sp}(\gamma - \gamma^*)$ принадлежит полуокружности S^1 : $\text{Im } z \geq 0$. Обозначим

$$\sigma = \text{sp}(\gamma), \quad \sigma^* = \text{sp}(\gamma^*).$$

Вследствие гомеоморфизма $w(\cdot)$, определенного формулой (2.3), имеем $w(X) = -e$, $w(X^*) = e$, и определение (5.1) функции M дает

$$M[\lambda_\infty, X_\infty; X_\infty^*, X_\infty] = \text{K. I.}[\sigma, (-1)]$$

$$M[\lambda_\infty, X_\infty^*; X_\infty, X_\infty^*] = \text{K. I.}[\sigma^*, (1)].$$

Таким образом, формула (5.8) совпадает с (4.12), а (4.12) имеет место, потому что выполнено условие (4.11).

Лемма 5.2. *Справедлива формула*

$$m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) + m(\lambda'_\infty, \lambda_\infty) = l. \quad (5.9)$$

Доказательство. Подставим в формулу (4.4) для $\text{Inert}(\cdot)$ выражение (5.7).

Следующая лемма дополняет лемму 5.1.

Лемма 5.3. *Всякая функция*

$$n: (\lambda_q, \lambda'_q) \mapsto n(\lambda_q, \lambda'_q),$$

определенная для $\lambda_q, \lambda'_q \in \Lambda(l)$, где λ и λ' трансверсальны, со значениями в абелевой группе,

локально постоянная на своей области определения,

такая, что для любых попарно-трансверсальных $\lambda, \lambda', \lambda''$

$$n(\lambda_q, \lambda'_q) - n(\lambda_q, \lambda''_q) + n(\lambda'_q, \lambda''_q) = 0, \quad (5.10)$$

тождественно равна нулю.

Доказательство. В силу (5.10) n постоянно в окрестности каждой пары (λ_q, λ'_q) , трансверсальной или нетрансверсальной.

Следовательно, n постоянно на $\Lambda_q^2(l)$ в силу связности этого многообразия. Из (5.10) вытекает тогда, что значение этой функции — нуль.

Из совокупности доказанных утверждений следует

Теорема 5. 1) *Индекс Маслова (определения 5.1, 5.2 и 5.3) есть единственная функция*

$$m: (\lambda_\infty, \lambda'_\infty) \mapsto m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) \in \mathbb{Z},$$

определенная на парах трансверсальных элементов $\Lambda_\infty(l)$, локально постоянная и дающая следующее разложение для индекса инерции:

$$\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) - m(\lambda_\infty, \lambda''_\infty) + m(\lambda'_\infty, \lambda''_\infty). \quad (5.7)$$

2) *В соответствии с определением 5.2 эта функция обладает следующими свойствами:*

$$m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) + m(\lambda'_\infty, \lambda_\infty) = l, \quad (5.9)$$

$$\forall S \in Sp_\infty(l) \quad m(S\lambda_\infty, S\lambda'_\infty) = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty), \quad (5.11)$$

$$\forall r, r' \in \mathbb{Z} \quad m(\beta^r \lambda_\infty, \beta^{r'} \lambda'_\infty) = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) + r - r', \quad (5.12)$$

$$m(X_\infty^*, X_\infty) = 0, \quad m(X_\infty, X_\infty^*) = l, \quad (5.13)$$

Доказательство 1). Леммы 5.1 и 5.3.

Доказательство (5.9). Лемма 5.2.

Доказательство (5.11) и (5.12). Определение 5.3 функции m и формулы (5.5) и (5.6).

Доказательство (5.13). Определение 5.3 функции m и формулы (5.4) и (5.9).

Замечание 5.1. Из формулы (5.7), очевидно, вытекает следующее равенство: если $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ — четыре попарно-трансверсальных элемента $\Lambda(l)$, то

$$\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') - \text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda''') + \\ + \text{Inert}(\lambda, \lambda'', \lambda''') - \text{Inert}(\lambda', \lambda'', \lambda''') = 0.$$

Замечание 5.2. Назовем базой всякую пару трансверсальных элементов $(\mu_\infty, \mu'_\infty) \in \Lambda_\infty^2(l)$, такую, что $\forall \lambda_\infty, \lambda'_\infty \in \Lambda_\infty(l)$, $M[\lambda_\infty, \lambda'_\infty; \mu_\infty, \mu'_\infty] = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty)$. Например, пара (X_∞, X_∞^*) есть база. В силу свойства аддитивности M (формула (5.3)) условие того, что пара $(\mu_\infty, \mu'_\infty)$ образует базу, может быть сформулировано так:

$$m(\mu_\infty, \mu'_\infty) = 0.$$

6. Скачок индекса Маслова $m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty)$ в точке (λ, λ') , где $\dim \lambda \cap \lambda' = 1$

Маслов [11] определил свой индекс с точностью до аддитивной постоянной значением его скачка при пересечении гиперповерхности $\Sigma_{\Lambda_\infty^2} \subset \Lambda_\infty^2(l)$, которая представляет собой множество пар $(\lambda_\infty, \lambda'_\infty)$, проектирующихся в нетрансверсальные элементы $\Lambda(l)$. В теореме 6 будет дано выражение этого скачка.

Установим сначала некоторые свойства $U(l)$. Обозначим через γ ориентированную кривую в $U(l)$:

$$\gamma: [-1, 1] \ni \vartheta \mapsto u(\vartheta) \in U(l); \quad u_\vartheta = \frac{du}{d\vartheta} \neq 0.$$

Лемма 6.1. Пусть $\exp i\psi(\vartheta)$ — простое собственное значение $u(\vartheta)$ и $z(\vartheta)$ — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$\|z(\vartheta)\|^2 \psi_\vartheta = \left(\frac{1}{i} u^{-1}(\vartheta) u_\vartheta z(\vartheta) | z(\vartheta) \right). \quad (6.1)$$

Замечание 6.1. Напомним, что если U — группа Ли, u — элемент U , X_k — инфинитезимальные преобразования, ω_k —

формы Маурера — Картана, то $u^{-1}du$ (следовательно, в частности, $u^{-1}u_{\vartheta}$) задается выражением

$$u^{-1}du = \sum_k \omega_k(u, du) X_k.$$

См. Э. Картан [4].

Замечание 6.2. Так как $U(l)$ — унитарная группа, то $\frac{1}{i}u^{-1}(\vartheta)U_{\vartheta}$ есть произвольная самосопряженная $l \times l$ матрица, характеризующая вектор u_{ϑ} , касательный в точке $u(\vartheta)$ к $U(l)$.

Доказательство. Поскольку $\exp(i\psi(\vartheta))$ — простое собственное значение, $\psi(\vartheta)$ — дифференцируемая функция ϑ , то собственный вектор $z(\vartheta)$, определенный с точностью до скалярного множителя, также можно выбрать дифференцируемым по ϑ . Тогда, продифференцировав соотношение

$$u(\vartheta)z(\vartheta) = z(\vartheta)(\exp i\psi(\vartheta))$$

и умножив слева на $\frac{1}{i}u^{-1}(\vartheta)$, получим

$$\frac{1}{i}u^{-1}u_{\vartheta}z + \frac{1}{i}z_{\vartheta} = \frac{1}{i}u^{-1}z_{\vartheta}\exp(i\psi) + z(\vartheta)\psi_{\vartheta}.$$

Чтобы исключить z_{ϑ} , умножим обе части скалярно на z . Так как в силу унитарности

$$(u^{-1}z_{\vartheta}\exp(i\psi)|z) = (z_{\vartheta}|\exp(-i\psi)uz) = (z_{\vartheta}|z),$$

то отсюда следует формула (6.1).

Обозначим через Σ_U множество $u \in U(l)$, таких, что $(1) \in \text{sp } u$; напомним, что (1) — точка единичной окружности с аффиксом 1.

Следующая лемма дает геометрическую интерпретацию гипотезы, которая будет сделана в лемме 6.3.

Лемма 6.2. Если $u(0) = \Sigma_U$ и 1 — простое собственное значение $u(0)$, а $z(0)$ — соответствующий собственный вектор, то условие, что вектор u_{ϑ} касается Σ_U в точке $u(0)$, таково:

$$\left(\frac{1}{i}u^{-1}(0)u_{\vartheta}(0)z(0)|z(0)\right) = 0. \quad (6.2)$$

Доказательство. $u(0)$ — регулярная точка Σ_U . В силу леммы (6.1) всякое касательное направление к Σ_U в точке $u(0)$ удовлетворяет (6.2). Гиперплоскость направлений, удовлетворяющих (6.2), содержит, следовательно, касательную плоскость к Σ_U в точке $u(0)$. Но Σ_U есть гиперповерхность $U(l)$.

Лемма 6.3. Если линия $\gamma \in U(l)$ пересекает Σ_U в одной точке $u(0)$, 1 — простое собственное значение $u(0)$ и соот-

ветствующий собственный вектор $z(0)$, удовлетворяющий условию

$$\left(\frac{1}{i} u^{-1}(0) u_{\vartheta} z(0) \mid z(0) \right) \neq 0$$

(т. е. если γ не касается Σ_U), то

$$K. I. [\operatorname{sp} \gamma, (1)] = \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{i} u^{-1}(0) u_{\vartheta} z(0) \mid z(0) \right). \quad (6.3)$$

Доказательство. Пусть $\exp i\psi(\vartheta)$ — собственное значение $u(\vartheta)$, близкое к 1. Очевидно, если $\psi_{\vartheta}(0) \neq 0$, то

$$K. I. [\operatorname{sp} \gamma, (1)] = \operatorname{sgn} \psi_{\vartheta}(0).$$

Следовательно, (6.3) вытекает из (6.1).

Обозначения. Σ_{Λ} означает множество нетрансверсальных пар (λ, λ')

$$\Sigma_{\Lambda} \subset \Lambda^2(l).$$

Через Γ обозначим дифференцируемую кривую в $\Lambda^2(l)$:

$$[-1, 1] \ni \vartheta \mapsto (\lambda(\vartheta), \lambda'(\vartheta)) \in \Lambda^2(l);$$

$w(\vartheta)$ и $w'(\vartheta)$ — образы $\lambda(\vartheta)$ и $\lambda'(\vartheta)$ в $W(l)$ (см. (2.3)).

Лемма 6.4. Если Γ пересекает Σ_{Λ} в одной точке $(\lambda(0), \lambda'(0))$ и если

$$\dim \lambda(0) \cap \lambda'(0) = 1, \quad z(0) \in \lambda(0) \cap \lambda'(0),$$

$$\left(\frac{1}{i} w_{\vartheta} w^{-1}(0) z(0) \mid z(0) \right) \neq \left(\frac{1}{i} w'_{\vartheta} w'^{-1}(0) z(0) \mid z(0) \right),$$

то

$$K. I. [\operatorname{sp} \Gamma, (1)] = \operatorname{sgn} \left\{ \left(\frac{1}{i} w_{\vartheta} w^{-1}(0) z(0) \mid z(0) \right) - \left(\frac{1}{i} w'_{\vartheta} w'^{-1}(0) z(0) \mid z(0) \right) \right\}. \quad (6.4)$$

Доказательство. Линия $\Gamma \in \Lambda^2(l)$ отображается в линию $\gamma \in U(l)$

$$\gamma: [-1, 1] \ni \vartheta \mapsto u(\vartheta) = w(\vartheta) w'^{-1}(\vartheta).$$

По определению

$$K. I. [\operatorname{sp} \Gamma, (1)] = K. I. [\operatorname{sp} \gamma, (1)].$$

В силу п. 3) леммы 2.1 γ пересекает Σ_U в единственной точке $\vartheta = 0$, 1 — простое собственное значение $u(0)$; в силу п. 2) леммы 2.1 имеем

$$z(0) \perp w(0) \overline{z(0)} = 0; \quad z(0) \perp w'(0) \overline{z(0)} = 0.$$

Следовательно, $z(0) = u(0)z(0)$. Но справедливо равенство $u^{-1}u_{\vartheta} = u^{-1}w_{\vartheta}w^{-1}u = w'_{\vartheta}w'^{-1}$. Отсюда (так как u унитарно)

$$(u^{-1}(0)u_{\vartheta}z(0) | z(0)) = (w_{\vartheta}w^{-1}(0)z(0) | z(0)) - \\ - (w'_{\vartheta}w'^{-1}(0)z(0) | z(0)).$$

Следовательно, в силу леммы (6.3)

$$K. I. (\operatorname{sp} \gamma, (1)) = \operatorname{sgn} \left\{ \left(\frac{1}{i} w_{\vartheta}w^{-1}(0)z(0) | z(0) \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{i} w'_{\vartheta}w'^{-1}(0)z(0) | z(0) \right) \right\},$$

откуда вытекает (6.4).

Лемма 6.5. Пусть $\vartheta \mapsto \lambda(\vartheta)$ и $\vartheta \rightarrow z(\vartheta)$ — дифференцируемые отображения отрезка $[-1, 1]$ в $\Lambda(l)$ и $z(l)$, такие, что $z(\vartheta) \in \lambda(\vartheta)$. Тогда

$$\left(\frac{1}{2i} w_{\vartheta}w^{-1}z | z \right) = [z_{\vartheta}, z(\vartheta)]. \quad (6.5)$$

Доказательство. В силу п. 2) леммы 2.1

$$z \perp w\bar{z} = 0.$$

Дифференцируя по ϑ , получаем

$$z_{\vartheta} + w_{\vartheta}\bar{z} + w\bar{z}_{\vartheta} = 0.$$

Отсюда

$$(z_{\vartheta} | z) - (w_{\vartheta}w^{-1}z, z) + (w\bar{z}_{\vartheta} | z) = 0,$$

где

$$(w\bar{z}_{\vartheta} | z) = (\bar{z}_{\vartheta} | w^{-1}z) = -(\bar{z}_{\vartheta} | \bar{z}) = -\overline{(z_{\vartheta} | z)}.$$

Подставляя вместо последнего слагаемого $-\overline{(z_{\vartheta} | z)}$ и вспоминая, что, согласно (1.1), $\operatorname{Im}(z | z') = [z, z']$, получаем отсюда (6.5).

Левая часть формулы (6.4) в силу определения (5.3) и формулы (5.2) выражается через индекс Маслова.

Правая часть с помощью только что доказанной леммы и формулы (6.5) выражается через симплектическую форму $[\cdot, \cdot]$. Отсюда получается следующая теорема, которая понадобится при доказательстве теоремы 3.2 в § 3.

Теорема 6. Пусть

$$[-1, 1] \ni \vartheta \mapsto (\lambda_{\infty}, \lambda'_{\infty}) \in \Lambda_{\infty}^2(l),$$

$$[-1, 1] \ni \vartheta \mapsto (z, z') \in Z^2(l)$$

— два дифференцируемых отображения, таких, что

- (i) $z \in \lambda, z' \in \lambda'$ для любых ϑ ;
- (ii) $z = z' \neq 0$ для $\vartheta = 0$, λ и λ' трансверсальны при $\vartheta \neq 0$;

(iii) функция $[-1, 1] \in \mathfrak{D} \rightarrow [z, z'] \in \mathbb{R}$ имеет только один нуль $\mathfrak{D} = 0$ и этот нуль простой.

Тогда существует постоянная $c \in \mathbb{Z}$, такая, что

$$\begin{aligned} m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) &= c && \text{для } [z, z'] < 0, \\ m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) &= c + 1 && \text{для } [z, z'] > 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

7. Индекс Маслова на $Sp_\infty(l)$.

Смешанный индекс инерции

Пусть

$$S, S', S'' \in Sp_\infty(l) \setminus \Sigma_{Sp_\infty}, \text{ таковы, что } SS'S'' = E. \quad (7.1)$$

Пусть, далее, s, s', s'' — проекции этих элементов $Sp_\infty(l)$ на $Sp(l)$. Формула (4.7) теоремы 4.1, которая связывает определение индекса инерции на $\Lambda(l)$ и $Sp(l)$, и формула (5.7) теоремы 5, которая связывает индекс инерции на $\Lambda(l)$ с индексом Маслова, дают в силу свойства инвариантности индекса Маслова (5.9)

$$\text{Inert}(s, s', s'') = m(SX_\infty^*, X_\infty^*) - m(S'^{-1}X_\infty^*, X_\infty^*) + m(S''X_\infty^*, X_\infty^*).$$

Преобразуем эту формулу к виду (7.3) с помощью следующего определения.

Определение 7.1. Индекс Маслова на $Sp_\infty(l)$. Если $S \in Sp_\infty(l) \setminus \Sigma_{Sp_\infty}$, положим по определению

$$m(S) = m(SX_\infty^*, X_\infty^*). \quad (7.2)$$

Это определение имеет смысл, так как в силу замечания 4.1 условие $S \notin \Sigma_{Sp_\infty}$ эквивалентно условию, что SX^* и X^* трансверсальны.

Дополним эту формулу леммой, аналогичной лемме 5.3.

Лемма 7. Всякая функция

$$n: S \mapsto n(S),$$

определенная в $S \in Sp_q(l) \setminus \Sigma_{Sp_q}$,

принимая значения в абелевой группе,

локально постоянная на своей области определения,

такая, что выполняется условие

$$n(S) - n(S'^{-1}) + n(S'') = 0, \text{ если } SS'S'' = E,$$

тождественно равна нулю.

Эта лемма, теорема 5 и формула (3.12) показывают, что имеет место

Теорема 7.1. 1) Индекс Маслова, определенный формулой (7.2), есть единственная функция

$$m: Sp_{\infty}(l) \setminus \Sigma_{Sp_{\infty}} \rightarrow \mathbb{Z},$$

локально постоянная и связанная с индексом инерции условием: при выполнении гипотезы (7.1)

$$\text{Inert}(s, s', s'') = m(S) - m(S'^{-1}) + m(S''). \quad (7.3)$$

2) Для этой функции справедливо равенство

$$m(S) + m(S^{-1}) = l. \quad (7.4)$$

3) Если α — образующая группы $\pi_1[Sp(l)]$ (определение 3), то

$$m(\alpha^r S) = m(S) + 2r. \quad (7.5)$$

Определение 7.2. Смешанный индекс инерции. Пусть $s \in Sp(l) \setminus \Sigma_{Sp}$; $\lambda, \lambda' \in \Lambda(l)$, трансверсальны к X^*

$$\text{и таковы, что } \lambda = s\lambda'. \quad (7.6)$$

Смешанный индекс инерции $\text{Inert}(s, \lambda, \lambda')$ определяется так:

$$\text{Inert}(s, \lambda, \lambda') = \text{Inert}(sX^*, X^*, \lambda) = \text{Inert}(X^*, s^{-1}X^*, \lambda'). \quad (7.7)$$

Два последних выражения совпадают в силу свойства инвариантности (4.5).

Очевидно, справедлива

Теорема 7.2. При выполнении условий (7.6)

$$\text{Inert}(s^{-1}, \lambda', \lambda) = l - \text{Inert}(s, \lambda, \lambda'), \quad (7.8)$$

$$\text{Inert}(s, \lambda, \lambda') = m(S) - m(\lambda_{\infty}, X_{\infty}^*) + m(\lambda'_{\infty}, X_{\infty}^*), \quad (7.9)$$

где $\lambda_{\infty} = S\lambda'_{\infty}$ и s — проекция $S \in Sp_{\infty}(l)$.

Дадим выражение смешанного индекса инерции через индекс инерции квадратичной формы, как это было сделано для $\text{Inert}(s, s', s'')$ (§ 1, определение 2.4) и для $\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'')$ (§ 2, п. 4). Этот результат будет нужен в п. 10.

Теорема 7.3. При условии (7.6) мы имеем $s = s_A$ (§ 1, п. 1), и уравнение λ' в силу (2.5) имеет вид $\lambda': p' = \varphi'_x(x')$, где φ' — квадратичная форма на X .

Тогда

$$\text{Inert}(s, \lambda, \lambda') = \text{Inert}(A(0, \cdot) + \varphi'(\cdot)). \quad (7.10)$$

Доказательство. Согласно формуле (7.7) и определению (п. 4), для $\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'')$ $\text{Inert}(s, \lambda, \lambda') = \text{Inert}(X^*, s^{-1}X^*, \lambda')$

есть индекс инерции квадратичной формы

$$x' \mapsto [z, z'],$$

где $z = (x, p)$, $z' = (x', p')$,

$$(x, p) \in X^*, \quad s(x', p') \in X^*, \quad (x + x', p + p') \in \lambda'. \quad (7.11)$$

Соотношения (7.11) означают, что

$$x = 0, \quad p' = -A_{x'}(0, x'), \quad p + p' = \varphi'_{x'}(x + x'),$$

откуда

$$x = 0, \quad p = A_{x'}(0, x') + \varphi'_{x'}(x').$$

Поэтому $[z, z'] = \langle p, x' \rangle = 2A(0, x') + 2\varphi'(x')$, т. е. верна формула (7.10).

8. Индексы Маслова на $\Lambda_q(l)$ и $Sp_q(l)$

Обозначим λ_q и $\lambda'_q \in \Lambda_q(l)$, $S \in Sp_q(l)$ проекции λ_∞ и $\lambda'_\infty \in \Lambda_\infty(l)$, $S_\infty \in Sp_\infty(l)$.

В силу (5.10) и (7.5), где α и β — соответственно образующие $\pi_1[Sp(l)]$ и $\pi_1[\Lambda(l)]$, равенства

$$m(\lambda_q, \lambda'_q) = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) \pmod{q}; \quad m(S) = m(S_\infty) \pmod{2q} \quad (8.1)$$

определяют функции $m(\lambda_q, \lambda'_q)$ и $m(S)$.

Мы назовем их также соответствующими индексами Маслова. Из теорем 5, 7.1, 7.2 и лемм 5.3 и 7 вытекают следующие свойства этих индексов.

Теорема 8. 1) *Индекс Маслова, определенный первой частью формулы (8.1), есть единственная функция*

$$m: (\lambda_q, \lambda'_q) \mapsto m(\lambda_q, \lambda'_q) \in \mathbb{Z}_q,$$

определенная на парах трансверсальных элементов $\Lambda_q(l)$, локально постоянная и связанная с индексом инерции тройки подпространств соотношением

$$\text{Inert}(\lambda_q, \lambda'_q, \lambda''_q) = m(\lambda_q, \lambda'_q) - m(\lambda_q, \lambda''_q) + m(\lambda'_q, \lambda''_q) \pmod{q}. \quad (8.2)$$

2) *Индекс Маслова, определенный формулой (8.1)₂, есть единственная функция*

$$m: Sp_q(l) \setminus \Sigma_{Sp_q} \rightarrow \mathbb{Z}_{2q},$$

локально постоянная и связанная с индексом инерции тройки (s, s', s'') соотношением

$$\text{Inert}(s, s', s'') = m(S) - m(S'^{-1}) + m(S'') \pmod{2q}. \quad (8.3)$$

3) Эти функции связаны следующими соотношениями:
 $m(\lambda_q, \lambda'_q) + m(\lambda'_q, \lambda_q) = l \pmod{q}; \quad m(s) + m(s^{-1}) = l \pmod{2q},$
 (8.4)

$\text{Inert}(s, \lambda, \lambda') = m(S) - m(\lambda_{2q}, X_{2q}^*) + m(\lambda'_{2q}, X_{2q}^*) \pmod{2q},$ (8.5)
 где $S \in Sp_q$, $\lambda_{2q} = S\lambda'_{2q}$.

Напомним, что $Sp_q(l)$ действует на $\Lambda_{2q}(l)$. С учетом п. 3) теоремы 2 § 1 утверждение 2) этой теоремы 8 означает, что индекс Маслова, введенный с помощью (7.2) и (8.1), совпадает при $q = 1$ с индексом Маслова, введенным в § 1 (формула (2.15)) для $Sp_2(l) \pmod{4}$.

Определение 8. Пусть $A \in \mathcal{A}$ (определение 1.2 § 1). Дадим определение $S_A \in Sp_q(l) \setminus \Sigma_{Sp_q}$, которое при $m = 2$ будет совпадать с определением, данным в § 1. $m(S_A)$ определено по $\pmod{2}$; в силу формулы (2.15) § 1

$$m(S_A) = m(A) \pmod{2}.$$

Формула (7.5) доказывает поэтому, что существует единственный элемент $Sp_q \setminus \Sigma_{Sp_q}$, который мы также обозначим S_A , такой, что его проекция на $Sp(l)$ есть s_A ,

$$m(S_A) = m(A) \pmod{2q}. \quad (8.6)$$

Отображение

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto S_A \in Sp_q \setminus \Sigma_{Sp_q},$$

очевидно, сюръективно и при $q = \infty$ биективно.

Если $q \neq \infty$, условие

$$S_A = S_{A'}$$

эквивалентно следующему:

$$\forall x, x' \in X \quad A(x, x') = A'(x, x'); \quad m(A) = m(A') \pmod{2q}.$$

9. Лагранжевы многообразия

Изотропное многообразие $V \in Z(l)$ — это многообразие, на котором

$$d\langle p, dx \rangle = 0, \text{ т. е. } \sum_j dp_j \wedge dx^j = 0, \text{ т. е. } d[z, dz] = 0. \quad (9.1)$$

Формула (9.1) означает, что касательная плоскость к многообразию изотропна. Следовательно, $\dim V \leq l$.

Лагранжевым многообразием называется изотропное многообразие V , такое, что

$$\dim V = l.$$

Обозначим через $\tilde{V}$ универсальное накрытие многообразия V . Формула (9.1) означает, что существуют функции, определенные с точностью до аддитивной постоянной, $\varphi: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$; $\psi: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что

$$d\varphi = \langle p, dx \rangle; \quad \psi(x, p) = \varphi(x, p) - \frac{1}{2} \langle p, x \rangle; \quad d\psi = \frac{1}{2} [z, dz]. \quad (9.2)$$

φ называется фазой V ; ψ — лагранжевой фазой V . Касательная плоскость к V в точке $z = (x, p) \in V$ есть, очевидно, лагранжева плоскость $\lambda(z)$.

Особый контур Σ_V многообразия V есть множество $z \in V$, таких, что $\lambda(z)$ не трансверсально X^* . На $V \setminus \Sigma_V$ и на касательных плоскостях $\lambda(z)$ можно принять x за локальные координаты. Уравнения V и касательных плоскостей к V в этих координатах запишутся тогда в силу 9.2 так:

$$V: p = \varphi_x(x); \quad \lambda(z): dp_l = \sum_{k=1}^l \varphi_{x^l x^k} dx^k. \quad (9.3)$$

Всякий элемент $Sp(l)$

$$s: Z(l) \ni z' \mapsto sz' = z \in Z(l)$$

преобразует лагранжево многообразие $V' \in Z(l)$ в лагранжево многообразие $V \in Z(l)$. При этом, если $z = sz'$, то лагранжева фаза

$$\psi(z) = \psi'(z') + \text{const.}$$

Если $z = (x, p)$ и $z' = (x', p')$, то фазы φ и φ' многообразий V и V' связаны соотношением

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \langle p, x \rangle = \varphi'(x') - \frac{1}{2} \langle p', x' \rangle + \text{const.} \quad (9.4)$$

Действительно, если $s = s_A \notin \Sigma_{Sp(l)}$, то $p = A_x$, $p' = -A_{x'}$ (в силу § 1, формула (1.11)), и мы имеем

$$\varphi(x) = \varphi'(x') + A(x, x') + \text{const}, \quad p = \varphi_x = A_x, \quad p' = \varphi'_{x'} = -A_{x'}. \quad (9.5)$$

Лемма 9. Пусть $s_A \in Sp(l) \setminus \Sigma_{Sp}$, и пусть $z' = (x', p') \in V' \setminus \Sigma_{V'}$ таково, что $s_A z' = z = (x, p) \in V \setminus \Sigma_V$, где $V = s_A V'$. Эти соотношения определяют, очевидно, диффеоморфизм $x' \mapsto x$ в локальных координатах V и V' .

Функциональный определитель этого диффеоморфизма имеет вид

$$\frac{d^l x}{d^l x'} = \frac{\text{Hess}_{x'} [A(x, x') + \varphi'(x')]}{\Delta^2(A)} \quad (9.6)$$

(При вычислении $\text{Hess}_{x'} x$ и x' считаются независимыми.)

Доказательство. В силу формулы (9.5) диффеоморфизм $x' \mapsto x$ таков, что

$$\varphi'_{x'}(x') + A_{x'}(x, x') = 0.$$

Отсюда, вспоминая, что в п. 1 § 1 было введено обозначение

$$\Delta^2(A) = \det_{j,k}(-A_{x^j x'^k}),$$

получаем формулу (9.6).

10. q -ориентация ($q = 1, 2, \dots, \infty$)

Понятия, которые определены в этом параграфе, позволяют внести в формулу (9.6) дополнение, которое будет существенно для дальнейшего.

Назовем q -ориентацией $\lambda \in \Lambda(l)$ выбор одного из элементов $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(l)$, имеющих проекцию λ .

Обозначим V_q и назовем q -ориентированным лагранжевым многообразием задание лагранжева многообразия V и такого непрерывного отображения

$$V \ni z \mapsto \lambda_{2q}(z) \in \Lambda_{2q}(l),$$

которое в соединении с естественной проекцией

$$\Lambda_{2q}(l) \rightarrow \Lambda(l)$$

задает отображение

$$V \ni z \mapsto \lambda(z) \in \Lambda(l),$$

где $\lambda(z)$ — l -плоскость, касательная к V в точке z .

Всякий элемент $Sp_q(l)$ преобразует q -ориентированное лагранжево многообразие V_q в другое такое же многообразие.

q -ориентация V характеризуется теми значениями, которые принимает локально постоянная функция

$$V \setminus \Sigma_V \ni z \rightarrow m(X_{2q}^*, \lambda_{2q}) \in \mathbb{Z}_{2q}.$$

В силу (5.10) изменение q -ориентации эквивалентно добавлению к этой функции m некоторой постоянной из $\mathbb{Z}_{2q}$.

Чтобы сформулировать теорему 10, дадим сначала

Определение 10. Аргумент $d^l x$ в точке $V_q \setminus \Sigma_V$, касательная плоскость в которой есть $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(l)$, определим формулой

$$\arg d^l x = \pi m(X_{2q}^*, \lambda_{2q}) \pmod{2q\pi}. \quad (10.1)$$

Например, в силу (5.13)

$$\arg d^l x = 0 \quad \text{на } X_{2q}. \quad (10.2)$$

Пусть $S_A \in Sp_q(l) \setminus \Sigma_{Sp_q}$ (определение 8). V'_q — q -ориентированное лагранжево многообразие в $Z(l)$;

$$V_q = S_A V'_q.$$

Пусть далее λ'_{2q} и λ_{2q} — касательные плоскости к V'_q и V_q в точках z' и $z = S_A z'$.

Если в формуле (8.5) положить $S = S_A$ и $s = s_A$, то в силу формулы (8.6) и определения 1.2 § 1 мы получим

$$m(S) = m(A) = \frac{2}{\pi} \arg(\Delta(A)).$$

В силу теоремы 7.3 и уравнения (9.3) для λ' $\text{Inert}(s_A, \lambda, \lambda')$ есть индекс инерции симметрической матрицы

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^k} [A(x, x') + \varphi'(x')] \right).$$

Согласно данному в § 1 определению 2.3 $\arg \text{Hess.}$, он равен, следовательно,

$$\frac{1}{\pi} \arg \text{Hess}_{x'} [A(x, x') + \varphi'(x')].$$

Формула (8.5) может быть поэтому записана в виде (см. (8.4))

$$\begin{aligned} m(X_{2q}^*, \lambda_{2q}) - m(X_{2q}^*, \lambda'_{2q}) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \arg \text{Hess}_{x'} [A + \varphi'] - \frac{1}{\pi} \arg \Delta^2(A) \pmod{2q}. \end{aligned}$$

Откуда получается следующая теорема (см. определение 10).

Теорема 10. Если V_q и V'_q два q -ориентированных лагранжева многообразия, таких, что

$$V_q = S_A V'_q, \quad \text{где } S_A \in Sp_q(l) \setminus \Sigma_{Sp_q},$$

то в формуле (9.6) аргументы левой и правой части равны $\pmod{2q\pi}$.

Нам понадобится частный случай этой теоремы для $q = 2$ (см. § 3 следствие 3).

§ 3. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

0. Введение

Во второй главе полученные результаты будут применяться в терминах симплектической геометрии. Пространство $Z(l)$ снабжено симплектической структурой, заданной с помощью

конкретного репера, т. е. пары (X, X^*) трансверсальных l -плоскостей. Нам нужно сформулировать результаты, не зависящие от выбора этого конкретного репера.

1. Симплектическое пространство Z

Z представляет собой $\mathbb{R}^{2l}$ и симплектическую форму, т. е. билинейную кососимметрическую невырожденную форму с действительными значениями

$$[\cdot, \cdot]: \mathbb{R}^{2l} \times \mathbb{R}^{2l} \ni (z, z') \mapsto [z, z'] \in \mathbb{R}.$$

Мы имеем, следовательно,

$$[z, z'] = -[z', z];$$

$[z, z'] = 0$ для данного z и всех $z' \in \mathbb{R}^{2l}$, только когда $z = 0$.

$Z(l)$ снабжено симплектической структурой, определенной в § 1 гл. I. Очевидно, что симплектические структуры Z и $Z(l)$ изоморфны, откуда вытекают естественные определения.

Подпространства Z , на которых форма $[z, z']$ тождественно равна 0, называются изотропными. Их размерность $\leq l$. Изотропные подпространства размерности l называются лагранжевыми. Множество $\Lambda(Z)$ лагранжевых плоскостей называется лагранжевым грассманианом Z . $\Lambda(Z)$ гомеоморфно $\Lambda(l)$ и обладает, следовательно, единственным накрытием $\Lambda_q(Z)$ порядка q ($q = 1, 2, \dots, \infty$). Проекция $\lambda_q \in \Lambda_q(Z)$ в $\Lambda(Z)$ будет обозначаться λ .

В Z имеет смысл следующее определение (ср. п. 4, § 2).

Определение 1.1. Пусть $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda(Z)$ попарно трансверсальны. $\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'')$ есть индекс инерции невырожденной квадратичной формы

$$z \mapsto [z, z'] = [z', z''] = [z'', z], \quad (1.1)$$

где $z \in \lambda, z' \in \lambda', z'' \in \lambda'', z + z' + z'' = 0$. Очевидно, что эта функция может принимать значения $\{0, 1, \dots, l\}$:

$$\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = \text{Inert}(\lambda', \lambda'', \lambda) = l - \text{Inert}(\lambda, \lambda'', \lambda'). \quad (1.2)$$

Обозначим через $\Sigma_{\Lambda_q^2} \in \Lambda_q^2(Z)$ множество пар нетрансверсальных элементов $\Lambda_q(Z)$.

В силу теоремы 8 и формулы (8.1) справедлива

Теорема 1. Для каждого $q \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ существует единственная функция

$$m: \Lambda_q^2(Z) \setminus \Sigma_{\Lambda_q^2} \rightarrow \mathbb{Z}_q,$$

называемая индексом Маслова, которая локально постоянна на своей области определения и для которой справедливо тождество

$$\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = m(\lambda_q, \lambda'_q) - m(\lambda_q, \lambda''_q) + m(\lambda'_q, \lambda''_q) \pmod{q}. \quad (1.3)$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

$$m(\lambda_q, \lambda'_q) + m(\lambda'_q, \lambda_q) = l \pmod{q}, \quad (1.4)$$

$$m(\lambda_q, \lambda'_q) = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) \pmod{q}. \quad (1.5)$$

Теорема 6 § 2 применима к скачку этого индекса Маслова при пересечении $\Sigma_{\Lambda_q^2}$.

Определение 1.2. Лагранжевым многообразием $V \subset Z$ называется многообразие размерности l , на котором

$$d[z, dz] = 0. \quad (1.6)$$

Его касательная плоскость лагранжева. Это значит, что на универсальном накрытии $\check{V}$ этого многообразия существует функция, называемая лагранжевой фазой:

$$\psi: \check{V} \rightarrow \mathbf{R}, \text{ такая, что } d\psi = \frac{1}{2}[z, dz]. \quad (1.7)$$

Эта функция определена с точностью до аддитивной постоянной.

2. Реперы в Z

Репер в Z есть изоморфизм

$$R: Z \rightarrow Z(l), \quad (2.1)$$

сохраняющий $[\cdot, \cdot]$. Если R и R' — два таких репера, преобразование RR'^{-1} называют заменой репера

$$RR'^{-1} \in Sp(l). \quad (2.2)$$

Очевидно, если $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda(Z)$, то $R\lambda, R\lambda', R\lambda'' \in \Lambda(l)$ и

$$\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = \text{Inert}(R\lambda, R\lambda', R\lambda''). \quad (2.3)$$

Если V есть лагранжево многообразие в Z , то RV есть лагранжево многообразие в $Z(l)$, фаза которого φ_R определяется так:

$$\varphi_R(z) = \psi(z) + \frac{1}{2}\langle p, x \rangle, \quad \text{где } Rz = (x, p) \in X \oplus X^* = Z(l). \quad (2.4)$$

Множество точек V , касательная плоскость в которых не трансверсальна $R^{-1}X^*$, мы обозначим Σ_R и назовем особым контуром V относительно репера R .

На $V \setminus \Sigma_R$ можно принять x за локальные координаты. В силу леммы 9 § 2 имеет место

Теорема 2. Пусть x и x' — локальные координаты, определенные на

$$V \setminus (\Sigma_R \cup \Sigma_{R'})$$

двумя реперами R и R' , такими, что $RR'^{-1} \in Sp(l) \setminus \Sigma_{Sp}$. Существует, следовательно, A (см. § 1, п. 2), такое, что $s_A = RR'^{-1}$. Обозначим $\varphi'(x') = \varphi_{R'}(z)$ фазу $R'V$. Тогда локальный диффеоморфизм $X \ni x' \mapsto x \in X$ имеет следующий функциональный определитель:

$$\frac{d^l x}{d^l x'} = \frac{\text{Hess}_{x'} [A(x, x') + \varphi'(x')]}{\Delta^2(A)}. \quad (2.5)$$

(При вычислении $\text{Hess}_{x'}$ x и x' рассматриваются как не зависящие друг от друга переменные.)

Замечание 2. Реперы, которые определены выше, не позволяют определить q -ориентацию, если $q > 1$.

3. q -реперы пространства Z

Определенные ниже q -реперы пространства Z дают возможность определить q -ориентацию. q -репер ($q \in \{1, 2, \dots, \infty\}$) представляет собой

- (i) Изоморфизм $j_R: Z \rightarrow Z(l)$, сохраняющий $[\cdot, \cdot]$.
- (ii) Гомеоморфизм $h_R: \Lambda_{2q}(Z) \rightarrow \Lambda_{2q}(l)$, естественным образом которого является гомеоморфизм $\Lambda(Z) \rightarrow \Lambda(l)$, индуцированный j_R .

Если R и R' — два таких репера, замена репера RR'^{-1} состоит, следовательно, из

$$(i) \quad s = j_R j_{R'}^{-1} \in Sp(l),$$

- (ii) $H = h_R h_{R'}^{-1}$ — гомеоморфизма $\Lambda_{2q}(l)$, естественным образом которого является гомеоморфизм $\Lambda_2(l)$, индуцированный s (см. § 2, пример 3.1).

Чтобы, зная s , определить H , достаточно задать $HX_{2q}^* \in \Lambda_{2q}(l)$, проекцией которого является $sX_2^* \in \Lambda_2(l)$.

Существует q элементов $Sp_q(l)$, проектирующихся в $s \in Sp(l)$; они переводят X_{2q}^* в q элементов $\Lambda_{2q}(l)$, проектирующихся в $sX_2^* \in \Lambda_2(l)$ (см. § 2, (3.12)).

Единственный элемент $S \in Sp_q(l)$ с проекцией $s \in Sp(l)$ и такой, что $SX_{2q}^* = HX_{2q}^*$, индуцирует, следовательно, гомеоморфизм H многообразия $\Lambda_{2q}(l)$. Он характеризует преобразование RR'^{-1} , которое мы обозначим S ,

$$RR'^{-1} \in Sp_q(l). \quad (3.1)$$

Через R мы будем обозначать как j_R , так и h_R , т. е. будем писать

$$R: Z \ni z \mapsto Rz = (x, p) \in X \oplus X^* = Z(l),$$

$$R: \Lambda_{2q}(Z) \ni \lambda_{2q} \mapsto R\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(l).$$

Очевидно,

$$\forall \lambda_{2q}, \lambda'_{2q} \in \Lambda_{2q}(Z), \quad m(\lambda_{2q}, \lambda'_{2q}) = m(R\lambda_{2q}, R\lambda'_{2q}) \pmod{2q}. \quad (3.2)$$

R переводит q -ориентированное лагранжево многообразие V пространства Z в аналогичное многообразие $Z(l)$. Если $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(Z)$ есть касательная плоскость к V в точке z , мы определим

$$m_R(z) = m(R^{-1}X_{2q}^*, \lambda_{2q}) \in \mathbb{Z}_{2q}. \quad (3.3)$$

Если x — локальные координаты на q -ориентированном многообразии V , определенные q -репером R , то положим по определению

$$\arg d^l x = \pi m_R(z) \pmod{2q\pi}. \quad (3.4)$$

Пример 3.1. На $R^{-1}X_{2q}$ $\arg d^l x = 0 \pmod{2q\pi}$ в силу § 2 (10.2).

Теорема 10 § 2 позволяет, очевидно, следующим образом дополнить теорему 2.

Теорема 3.1. В формулировке теоремы 2 предположим, что $V = V_q$ q -ориентировано и что R и R' — q -реперы. Тогда

$$RR'^{-1} = S_A \in Sp_q(l) \quad (3.5)$$

и аргументы левой и правой частей формулы (2.5) совпадают $\pmod{2q\pi}$.

Напомним, что в § 1 были даны определения 1.2 и 2.3 $\arg \Delta(A)$ и $\arg \text{Hess}$; в силу § 2 (8.6)

$$m(A) = m(S_A) \pmod{2q}.$$

В главе II, § 1 при доказательстве теоремы 4 (iii) будет использован следующий частный случай этой теоремы.

Следствие 3. Если $q = 2$, то полумера $[d^l x]^{1/2}$ лагранжева 2-ориентированного многообразия V_2 определена так:

$$\arg [d^l x]^{1/2} = \frac{\pi}{2} m_R(z) \pmod{2\pi}. \quad (3.6)$$

Мы имеем

$$[d^l x]^{1/2} = \frac{1}{\Delta(A)} \{ \text{Hess}_{x'} [A(x, x') + \varphi'(x')] \}^{1/2} [d^l x']^{1/2}. \quad (3.7)$$

В окрестности точки Σ_R , где $\dim \lambda \cap R^{-1}X^* = 1$, для $m_R(z)$ справедливо следующее утверждение, которое вытекает из теоремы 6 § 2.

Теорема 3.2. Пусть $\lambda(z)$ — касательная плоскость в точке z к многообразию V .

$z \in \Sigma_R$ означает, что $\dim \lambda \cap R^{-1}X^* > 0$.

Для некоторой окрестности точки $z \in \Sigma_R$ проекция $R\lambda(z)$ на X , параллельная X^* , есть гиперплоскость

$$\sum_{j=1}^l c_j dx^j = 0. \quad (3.8)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) На V существует регулярная мера $\tilde{\omega}^1$, такая, что для $z \in \Sigma_R$ и для любых j и k

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dp_k \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^l = c_j c_k \tilde{\omega}. \quad (3.9)$$

2) Если $V = V_q$ — q -ориентированное многообразие, то существует константа $c \in \mathbb{Z}_{2q}$, такая, что

$$\begin{aligned} m_R(z) &= c \bmod 2q & \text{для } \frac{d^l x}{\tilde{\omega}} < 0, \\ m_R(z) &= c + 1 \bmod 2q & \text{для } \frac{d^l x}{\tilde{\omega}} > 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

при условии, что $\frac{d^l x}{\tilde{\omega}}$ имеет на Σ_R нуль первого порядка.

Доказательство. 1) Коэффициенты c_j в формуле (3.8) не все равны нулю. Предположим $c_1 \neq 0$.

Тогда в точке $z \in V$

$$dx^2 \wedge \dots \wedge dx^l \neq 0; \exists k, \text{ такое, что } dp_k \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^l \neq 0. \quad (3.11)$$

Так как на V $\sum_j dp_j \wedge dx^j = 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} \forall k \ dp_1 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \dots \wedge dx^l + dp_k \wedge dx^k \wedge dx^2 \wedge \dots \\ \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^l = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из уравнения (3.8)

$$dx^1 = -\frac{c_k}{c_1} dx^k \bmod (dx^2 \dots \widehat{dx^k} \dots dx^l).$$

Полагая

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{c_1^2} dp_1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^l,$$

получаем отсюда

$$c_1 c_k \tilde{\omega} = dp_k \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^l, \quad (3.13)$$

¹⁾ Регулярная мера $\tilde{\omega}$ многообразия V — это дифференциальная l -форма, коэффициенты которой не обращаются в нуль ни в одной точке V .

т. е. формулу (3.9) для $j = 1$.

В силу (3.11) и (3.13)

$$\tilde{\omega} \neq 0 \quad \text{на } V \text{ в точке } z.$$

Заменяя в правой части (3.13) dx^j выражением

$$dx^j = -\frac{c_1}{c_j} dx^1 \bmod (dx^2, \dots, \widehat{dx^j}, \dots, dx^l),$$

мы получаем (3.9) для $j > 1$ и $c_j \neq 0$. Если $j > 1$ и $c_j = 0$, то и левая и правая части формулы (3.9) обращаются в нуль.

2) Предположим, что $c_1 \neq 0$ в точке Σ_R . Вблизи этой точки можно в силу (3.9) выбрать в качестве координаты точки $z \in V$ координаты $(p_1, x^2, \dots, x^l)$ точки Rz в $Z(l)$; на V $x^1, p_2, \dots, p_l$ являются, следовательно, функциями от $(p_1, x^2, \dots, x^l)$. Уравнение Σ_R таково:

$$\Sigma_R: \frac{\partial x^1(p_1, x^2, \dots, x^l)}{\partial p_1} = 0.$$

Пусть $\xi'(z)$ — вектор, принадлежащий $\lambda(z)$ с координатами $(dp_1 = 1, dx^2 = \dots = dx^l = 0)$. Вектор $R\xi'(z)$ имеет, следовательно, в $Z(l)$ координаты

$$dx^1 = \frac{\partial x^1(p_1, x^2, \dots, x^l)}{\partial p_1}, \quad dx^2 = 0, \dots, dx^l = 0,$$

$$dp_j = \frac{\partial p_j(p_1, x^2, \dots, x^l)}{\partial p_1}.$$

Обозначим $\xi(z)$ вектор в $R^{-1}X^*$, зависящий от $z \in V$, такой, что

$$R\xi(z) = \left(\frac{\partial p(p_1, x^2, \dots, x^l)}{\partial p_1} \right).$$

Мы имеем, следовательно, для $z \in \Sigma_R$

$$\xi(z) = \xi'(z).$$

Для близких точек имеем

$$[\xi(z), \xi'(z)] = [R\xi(z), R\xi'(z)] = \frac{\partial x^1}{\partial p_1} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^l x}{\tilde{\omega}}. \quad (3.14)$$

Последнее равенство справедливо, так как очевидное соотношение, справедливое на V ,

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^l = \frac{\partial x^1(p_1, x_2, \dots, x^l)}{\partial p_1} dp_1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^l,$$

означает в силу (3.9)

$$\frac{\partial x^1}{dp_1} = \frac{d^l x}{c_1^2 \tilde{\omega}}.$$

Но по теореме 6 § 2 для $z \in V \setminus \Sigma_R$ имеем

$$m_R(z) = m(R^{-1}X_\infty^*, \lambda_\infty(z)) = c \quad \text{для} \quad [\zeta(z), \zeta'(z)] < 0,$$

$$m_R(z) = m(R^{-1}X_\infty^*, \lambda_\infty(z)) = c + 1 \quad \text{для} \quad [\zeta(z), \zeta'(z)] > 0;$$

$c \in \mathbb{Z}$ — постоянная. Это утверждение и формула (3.14) доказывают (3.10).

4. q -симплектические геометрии

Очевидно, если R есть q -репер, группа

$$R^{-1}Sp_q(l)R = Sp_q(Z)$$

действует на Z и его лагранжевых многообразиях, сохраняя их q -ориентацию. В силу (3.1) эта группа не зависит от R .

Ф. Клейн определил геометрию как задание многообразия и действующей на нем группы Ли.

Каждая из групп $Sp_q(Z)$, где $q = 1, 2, \dots, \infty$, определяет тем самым на Z геометрию, которую удобно называть q -симплектической.

Заключение. В § 1 этой главы было определено представление унитарной группы $Sp_2(l)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(X)$, где $\dim X = l$. С помощью § 2 в § 3 изучение этой группы было сведено к изучению изоморфной группы $Sp_2(Z)$, которая определяет 2-симплектическую геометрию Z , где $\dim Z = 2l$. В § 2 и 3 изучены свойства индекса инерции и индекса Маслова, который был введен в § 1. Эти свойства позволяют нам в гл. II определить и изучить новую структуру — лагранжев анализ.

Глава II

ЛАГРАНЖЕВЫ ФУНКЦИИ. ЛАГРАНЖЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Введение

Резюме. В гл. I изучались дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами и функции, определенные на всем $X = \mathbb{R}^l$.

Цель главы II — расширить эти результаты. В § 2 задается симплектическое пространство Z размерности $2l$, снабженное 2-симплектической геометрией. Далее в нем определены:

лагранжевы функции и лагранжевы обобщенные функции, на которых локально действует $Sp_2(Z)$;

лагранжевы операторы, более общие, чем дифференциальные операторы, которые преобразуются под действием $Sp_2(Z)$ как дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами (ср. гл. I, § 1, теорема 3.1).

Каждая лагранжева функция U определена на лагранжевом многообразии $V \subset Z$. На каждом 2-репере R функция U имеет выражение U_R , которое есть функция с формальными значениями, определенная на $V \setminus \Sigma_R$. На каждом репере R произвольный лагранжев оператор a имеет выражение

$$a_R = a_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

которое есть формальный дифференциальный оператор порядка $\leq \infty$, локально действующий на U_R .

Замена репера

$$S = RR'^{-1} \in Sp_2(l) \quad (\text{ср. гл. I, § 3, п. 3})$$

есть локальный оператор, который переводит $U_{R'}$ в $U_R = SU_{R'}$, $a_{R'}$ в $a_R = Sa_{R'}S^{-1}$ и, следовательно, $a_{R'}U_{R'}$ в $a_RU_R = S(a_{R'}U_{R'})$.

Отсюда следует, что лагранжевы операторы действуют на лагранжевы функции и лагранжевы обобщенные функции.

Все выражения a_R одного и того же лагранжева оператора a легко выводятся из одной формальной функции a^0 , определенной на Z .

В геометрии замена репера оставляет инвариантными (или преобразует линейно) значения скалярной (или векторной) функции. Существенная особенность лагранжева анализа состоит в следующем: в каждой точке $z \in V$ группа $Sp_2(l)$ замен репера действует на ростки выражений U_R лаг-

ранжевой функции U , а не на значения этих выражений. $U^R = SU_{R'}$ может иметь особенности на Σ_R , но не иметь их на $\Sigma_{R'} \setminus \Sigma_{R'} \cap \Sigma_R$, в то время как особенности $U_{R'}$ лежат на $\Sigma_{R'}$. Особенности выражений U_R функции U не есть особенности самой функции U . Их можно квалифицировать как кажущиеся особенности. Природу этих особенностей можно уточнить с помощью индекса Маслова.

Историческое замечание. В. П. Маслов [10] выяснил существенный характер лагранжева анализа, хотя он изучал только проекции лагранжевых функций на X , не определяя явно ни самих лагранжевых функций, ни лагранжевых операторов.

Он пользовался только подгруппой $Sp_2(l)$, зависящей от выбора координат в X , подгруппой, порожденной преобразованиями Фурье по одной из координат.

§ 1. ФОРМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

0. Резюме

В п. 1 определяются и изучаются классы асимптотической эквивалентности функций. В п. 2 определены формальные функции. Формальные функции с компактным носителем, определенные на X , это классы асимптотической эквивалентности. Можно, следовательно, интегрировать их, действовать на них группой $Sp_2(l)$ и дифференциальными операторами (п. 3, 4, 6), определение которых может быть соответствующим образом обобщено. Отсюда следует далее (п. 4 и 6), что $Sp_2(l)$ и формальные дифференциальные операторы локально действуют на формальные функции, определенные на лагранжевых многообразиях V или их накрытиях $\tilde{V}$ независимо от того, компактны или нет носители этих функций. В п. 5 изучается скалярное произведение.

Формальные функции на $\tilde{V}$, которые не являются более классами асимптотической эквивалентности, дают возможность в § 2 определить лагранжевы функции.

1. Алгебра $\mathcal{C}(X)$ асимптотических классов эквивалентности Алгебра $\mathcal{B}(X)$

Пусть I — мнимая полупрямая на $\mathbb{C}$:

$$I = i[1, \infty].$$

Через $\mathcal{B}(X)$ мы будем обозначать алгебру отображений

$$f: I \times X \ni (v, x) \mapsto f(v, x) \in \mathbb{C},$$

имеющих непрерывные по (v, x) производные по x любого порядка, удовлетворяющие условию

$$\forall q, r \in \mathbb{N}^l, \quad \sup_{I \times X} \left| x^q \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^r f(v, x) \right| < \infty. \quad (1.1)$$

На $\mathcal{B}(X)$ действует группа $Sp_2(l)$ и дифференциальные операторы с коэффициентами, полиномиально зависящими от $\left(\frac{1}{v}, x\right)$;

$$a = a^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) = a^- \left(v, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}, x \right).$$

Если $l = \dim X = 0$, $\mathcal{B}(X)$ обозначается просто $\mathcal{B}$; $\mathcal{B}$ есть алгебра ограниченных непрерывных отображений $I \rightarrow \mathbb{C}$.

Алгебра $\mathcal{C}(X)$. Пусть $N \in \mathbb{R}_+$, и пусть $\mathcal{B}_N(X)$ — множество таких $f \in \mathcal{B}(X)$, что отображение

$$(v, x) \mapsto v^N f(v, x)$$

принадлежит $\mathcal{B}(X)$. Очевидно, $\mathcal{B}_N(X)$ есть идеал $\mathcal{B}(X)$, который уменьшается с возрастанием N ,

$\mathcal{B}_\infty(X) = \bigcap_{N \in \mathbb{R}_+} \mathcal{B}_N(X)$, следовательно, также есть идеал $\mathcal{B}(X)$.

Положим

$$\mathcal{C}(X) = \mathcal{B}(X) / \mathcal{B}_\infty(X). \quad (1.2)$$

$\mathcal{C}(X)$ — алгебра над полем $\mathbb{C}$. Ее элементы мы будем называть асимптотическими классами эквивалентности.

Условие, что f и $f' \in \mathcal{B}(X)$ принадлежат одному классу эквивалентности, состоит в том, что

$$\forall N \in \mathbb{R}_+ \quad f - f' \in \mathcal{B}_N(X).$$

$$\mathcal{C}_N(X) = \mathcal{B}_N(X) / \mathcal{B}_\infty(X) \quad (1.3)$$

есть, очевидно, идеал в $\mathcal{C}(X)$, который уменьшается с ростом N ;

$$\bigcap_{N \in \mathbb{R}_+} \mathcal{C}_N(X) = \{0\}. \quad (1.4)$$

Пусть f и $f' \in \mathcal{B}(X)$ лежат в классах $\tilde{f}$ и $\tilde{f}' \in \mathcal{C}(X)$. Чтобы выразить соотношения эквивалентности

$$f - f' \in \mathcal{B}_N(X), \quad \tilde{f} - \tilde{f}' \in \mathcal{C}_N(X), \quad N \leq \infty, \quad (1.5)$$

мы будем писать какое-нибудь из соотношений

$$f = f' \bmod \frac{1}{v^N}, \quad \tilde{f} = \tilde{f}' \bmod \frac{1}{v^N}, \quad f' \in \tilde{f} \bmod \frac{1}{v^N}. \quad (1.6)$$

Если $l = \dim X = 0$, то $\mathcal{C}(X)$ будет обозначаться $\mathcal{C}$. Очевидно, $\mathcal{C}(X)$ есть подалгебра алгебры функций $X \rightarrow \mathbb{C}$.

Всякий элемент $\tilde{f} \in \mathcal{C}(X)$ имеет *ограничение* на произвольную часть X и носитель

$$\text{supp}(\tilde{f}) \subset X. \quad (1.7)$$

Замечание 1. Пусть F — целая голоморфная функция

$$F: \mathbf{C}^J \rightarrow \mathbf{C}, \text{ такая, что } F(0) = 0.$$

Тогда $\forall f_j \in \tilde{f}_j$ функции $F(f_1, \dots, f_J)$ принадлежат к одному и тому же классу, который мы обозначим $F(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_J)$.

Таким образом, если $\tilde{f}_j \in \mathcal{C}(X)$, $j \in (1, \dots, J)$, то $F(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_J) \in \mathcal{C}(X)$.

Пусть $F: \mathbf{C}^J \rightarrow \mathbf{C}$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера и такая, что $F(0) = 0$. Так же, как выше, $\forall \tilde{f}_j \in \mathcal{C}$ ($j = 1, \dots, J$) определим $F(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_J) \in \mathcal{C}$.

Например, если $\tilde{f} \in \mathcal{C}$, то определены $|\tilde{f}|$, $\text{Re } \tilde{f}$, $\text{Im } \tilde{f}$. $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ — вещественна, если $\text{Im } \tilde{f} = 0$. В этом случае определены $\tilde{f}_+$ и $\tilde{f}_-$ (положительная и отрицательная части $\tilde{f}$). Если $\tilde{f}_- = 0$, то мы будем писать $\tilde{f} \geq 0$ и определим *частичную упорядоченность* на $\text{Re } \mathcal{C}$ (множестве вещественных элементов $\mathcal{C}$): пусть $\tilde{f}$ и $\tilde{g} \in \text{Re } \mathcal{C}$; $\tilde{f} \geq 0$, $\tilde{g} \geq 0$, тогда $\tilde{f} + \tilde{g} \geq 0$ и $\tilde{f} \cdot \tilde{g} \geq 0$; $\tilde{f}^2 \geq 0$. Если $\tilde{f} \leq 0$ (т. е. $-\tilde{f} \geq 0$), то не может быть $\tilde{f} > 0$ (т. е. $0 \leq \tilde{f} \neq 0$). Но $\tilde{f}$ может не быть ни ≤ 0 , ни > 0 .

Пусть

$$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad F(0) = 0,$$

— возрастающая функция, удовлетворяющая условию Гёльдера. Тогда $\forall \tilde{f} \in \text{Re } \mathcal{C}$ $F(\tilde{f}) \in \text{Re } \mathcal{C}$ (отношение порядка на $\text{Re } \mathcal{C}$ при этом сохраняется).

В частности, справедливо *неравенство Шварца*

$$\forall \tilde{f}_j, \tilde{g}_j \in \mathcal{C} \quad \left| \sum_j \tilde{f}_j \tilde{g}_j \right| \leq \left[\sum_j |\tilde{f}_j|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_j |\tilde{g}_j|^2 \right]^{1/2}.$$

Дифференциальные операторы с коэффициентами, полиномиально зависящими от $\left(\frac{1}{v}, x\right)$,

$$a = a^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) = a^- \left(v, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}, x \right),$$

очевидно, являются эндоморфизмами $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B}_N(X)$, $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}_N(X)$. Они действуют локально: ограничение $a\tilde{f}$ на открытое множество $\Omega \in X$ зависит только от ограничения $\tilde{f}$ на это множество;

$$\text{supp}(a\tilde{f}) \subset \text{supp}(\tilde{f}).$$

Как в § 1, п. 3, дифференциальный оператор

$$a = a^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) = a^- \left(v, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}, x \right)$$

ассоциирован с многочленом $a^0\left(\frac{1}{v}, x, p\right)$, имеющим вид

$$a^0(v, x, p) = e^{-\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} a^+(v, x, p) = e^{\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} a^-(v, p, x) \quad (1.8)$$

На $\mathcal{C}(X)$ определена операция интегрирования: если $f \in \mathcal{B}(X)$, функция

$$v \mapsto \int_X f(v, x) d^l x$$

принадлежит $\mathcal{B}$. Класс асимптотической эквивалентности этой функции, который зависит только от класса $\tilde{f}$ функции f , будет обозначаться

$$\int_X \tilde{f}(v, x) d^l x \in \mathcal{C};$$

$\int$ называется *асимптотическим интегралом*.

Скалярное произведение $(\cdot | \cdot)$ есть билинейная форма на $\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X)$ со значениями в $\mathcal{C}$, определенная как

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = \int_X f(v, x) \overline{g(v, x)} d^l x, \text{ где } f \in \tilde{f} \in \mathcal{C}(X), g \in \tilde{g} \in \mathcal{C}(X); \quad (1.9)$$

$\overline{g(v, x)}$ — функция, комплексно-сопряженная к $g(v, x)$, $\bar{v} = -v$. Очевидно, что $(\tilde{g}, \tilde{f}) = \overline{(\tilde{f}, \tilde{g})}$.

Полунорма $\|\cdot\|$ есть функция $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}$, значение которой ≥ 0 , определенная, как обычно:

$$\|\tilde{f}\|^2 = (\tilde{f}, \tilde{f}).$$

Очевидно,

$$\|\tilde{f} + \tilde{g}\| \leq \|\tilde{f}\| + \|\tilde{g}\|, \quad |(\tilde{f}, \tilde{g})| \leq \|\tilde{f}\| \cdot \|\tilde{g}\| \text{ в } \mathcal{C}$$

С другой стороны, имеет место

Лемма 1.1. $S_{p_2}(l)$ есть группа автоморфизмов, которые унитарны, т. е. сохраняют полунорму и скалярное произведение.

Доказательство. Пусть $S_A \in S_{p_2}(l) \setminus \sum_{S_{p_2}}$. Ее определение (1.10) дано в гл. I, § 1. С помощью интеграла (1.10) показывается, что S_A переводит класс асимптотической эквивалентности $\tilde{f}$ в класс $S_A \tilde{f}'$, определенный асимптотическим ин-

тегралом:

$$(S_A \tilde{f}') (x) = \left(\frac{|v|}{2\pi i} \right)^{l/2} \Delta(A) \int_{\tilde{X}} e^{vA(x, x')} \tilde{f}'(x') d^l x'.$$

Эта формула имеет смысл, потому что умножение на e^{vA} , где vA чисто мнимое, сохраняет, очевидно, асимптотическую эквивалентность. Операторы S_A действуют на $\mathcal{C}(X)$, и закон их композиции остается тем же, каким он был на $\mathcal{P}(X)$. Так как они порождают $Sp_2(l)$, то отсюда следует, что группа $Sp_2(l)$ действует на $\mathcal{C}(X)$. Так как $Sp_2(l)$ унитарна на $\mathcal{P}(X)$, она остается унитарной на $\mathcal{C}(X)$.

Из теорем 3.1 и 3.2 гл. I, § 1 и следствий из этих теорем вытекает

Лемма 1.2. Преобразование SaS^{-1} дифференциального оператора a с помощью $S \in Sp_2(l)$ есть дифференциальный оператор, ассоциированный с $a^0 \circ s^{-1}$. Здесь s — образ S в группе $Sp(l)$; s действует на пространстве $Z(l)$ векторов (x, p) .

Лемма 1.3. Для того чтобы дифференциальные операторы a и b были сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы

$$b^0(v, x, p) = \overline{a^0(v, x, p)}.$$

В частности, оператор a самосопряжен, если $a^0(v, x, p)$ принимает действительные значения для всех $v \in I$ и $(x, p) \in Z(l)$. Преобразование S переводит сопряженные операторы в сопряженные.

2. Формальные числа; формальные функции

Теорема 2.2 свяжет данные выше определения с теми, которые мы сейчас дадим.

Формальным числом называется формальный ряд

$$u = u(v) = \sum_{j \in J} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}}{v^r} e^{v\varphi_j}, \quad (2.1)$$

где J — конечное множество, $\alpha_{jr} \in \mathbb{C}$, $\varphi_j \in \mathbb{R}$, $\varphi_j \neq \varphi_k$ при $j \neq k$. Выражение (2.1) для формального числа по определению единственно.

Множество формальных чисел есть коммутативная алгебра $\mathcal{F}$ с очевидными правилами сложения и умножения.

$\mathcal{F}$ снабжена топологией, которая определяется следующей системой окрестностей нуля $\mathcal{V}(N, \varepsilon)$:

для $N \in \mathbf{N}$ и $\varepsilon \in \dot{\mathbf{R}}_+$ $u \in \mathcal{V}(N, \varepsilon)$ означает

$$\forall r \leq N \quad \sum_{j \in J} |\alpha_{jr}| < \varepsilon.$$

Формальная функция на X есть отображение $u: X \rightarrow \mathcal{F}$, которое можно представить в виде

$$u = u(v) = \sum_{j \in J} \sum_{r \in \mathbf{N}} \frac{\alpha_{jr}}{v^r} e^{v\varphi_j}, \quad (2.2)$$

где J — конечное множество; $\alpha_{jr}: X \rightarrow \mathbf{C}$; $\varphi_j: X \rightarrow \mathbf{R}$; α_{jr} и φ_j бесконечно дифференцируемы.

В точках, в окрестности которых какие-нибудь два значения φ_j совпадают, u можно разными способами представить в форме (2.2). Значение $u(v, x)$ в точке x обозначается

$$u(v, x) = \sum_{j \in J} \sum_{r \in \mathbf{N}} \frac{\alpha_{jr}(x)}{v^r} e^{v\varphi_j(x)}; \quad (2.3)$$

$u(v)$ имеет носитель

$$\text{supp } u(v) \subset \bigcup_{j,r} \text{supp } \alpha_{jr}. \quad (2.4)$$

Множество $\mathcal{F}(X)$ формальных функций на X есть коммутативная алгебра над $\mathcal{F}$. Множество формальных функций на X с компактным носителем есть подалгебра $\mathcal{F}_0(X)$ алгебры $\mathcal{F}(X)$. φ_j называются фазами, $\alpha_j = \sum_{r \in \mathbf{N}} \frac{\alpha_{jr}}{v^r}$ — амплитудами.

Множество $\mathcal{F}^0$ (соответственно $\mathcal{F}^0(X)$) элементов $\mathcal{F}$ (соответственно $\mathcal{F}(X)$) с нулевой фазой образует подалгебру (соответственно $\mathcal{F}(X)$)

Обозначим через Z симплектическое пространство, на котором определена 2-симплектическая геометрия, через V — лагранжево многообразие в Z (см. гл. I, § 1, п. 1 и п. 4) и через $\check{V}$ — универсальное накрытие V .

Формальную функцию $\check{U}_R$ на $\check{V}$ определяют:

(i) 2-репер R в Z ;

(ii) отображение $\check{U}_R = \check{U}_R(v) = \sum_{r \in \mathbf{N}} \frac{\alpha_r}{v^r} e^{v\varphi_R} : \check{V} \rightarrow \mathcal{F}, \quad (2.5)$

где φ_R — фаза RV (гл. I, § 3, п. 2). $\alpha_r: \check{V} \rightarrow \mathbf{C}$ — бесконечно дифференцируемые функции. Очевидно,

$$\text{supp } \check{U}_R = \overline{\bigcup_r \text{supp } \alpha_r} \subset \check{V}. \quad (2.6)$$

При заданных R и V множество формальных функций $\check{U}_R$ есть векторное пространство над $\mathcal{F}^0$; обозначим его $\mathcal{F}(\check{V}, R)$. Подмножество элементов этого пространства с компактным носителем есть подпространство $\mathcal{F}_0(\check{V}, R)$.

Топология в $\mathcal{F}(\check{V}, R)$ определяется системой окрестностей нуля $\mathcal{V}(K, p, r, \varepsilon)$, где K — компакт на V , $p, r \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$; $\check{U}_R \in \mathcal{V}(K, p, r, \varepsilon)$ означает, что на K частные производные порядка $\leq p$ от α_s , где $s \leq r$ по модулю $< \varepsilon$.

Через Σ_R обозначим особый контур V для репера R (гл. I, § 3, п. 2). $\check{\Sigma}_R$ — множество точек $\check{V}$, проектирующихся на Σ_R . Мы выведем свойства $\mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$ из свойств $\mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$. Эти последние будут получены из свойств $\mathcal{F}_0(X)$ с помощью композиции двух морфизмов, которые будут определены выше соответственно в теоремах 2.1 и 2.2.

Обозначение. Если $z \in Z$ и $Rz = (x, p)$, то обозначим $x = R_x z$. Композиция естественной проекции $\check{V} \rightarrow V$ и ограничения R_x на V будет обозначаться $\check{R}_x: \check{V} \rightarrow X$.

Теорема 2.1. Существует естественный морфизм

$$\Pi_r: \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_k, R) \rightarrow \mathcal{F}_0(X), \quad (2.7)$$

называемый проекцией; он определяется так: если

$$\check{U}_r \in \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_k, R), \text{ то } u = \Pi_k \check{U}_k \text{ означает}$$

$$u(v, x) = \sum_{\check{z} \in \check{R}_x^{-1}x} \check{U}_k(v, \check{z}). \quad (2.8)$$

Замечание 2.1. Π_R есть мономорфизм, если никакой период φ_R не равен нулю.

Доказательство. Формула (2.8) имеет смысл, так как $\text{supp } \check{U}_R$ — компактная часть $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$, $\check{R}_x$ — локальный гомеоморфизм и пересечение $\check{R}_x^{-1}x \cap \text{supp } \check{U}_R$ конечно.

Теорема 2.2. Существует естественный мономорфизм алгебры $\mathcal{F}_0(X)$ в алгебру $\mathcal{C}(X)$. Он позволяет считать, что

$$\mathcal{F}_0(X) \subset \mathcal{C}(X). \quad (2.9)$$

Определение этого морфизма таково: Пусть

$$u = \sum_{j \in J} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}}{v^r} e^{v\varphi_j} \in \mathcal{F}_0(X). \quad (2.10)$$

Обозначим

$$u_N = \sum_{j \in J} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{\alpha_{jr}}{v^r} e^{v\varphi_j} : \mathbf{I} \times X \rightarrow \mathbb{C}. \quad (2.11)$$

1) Существуют функции $f \in \mathcal{B}(X)$, такие, что

$$\forall N \quad f - u_N = 0 \bmod \frac{1}{v^N}.$$

2) Все эти функции принадлежат одному классу асимптотической эквивалентности $\tilde{f} \in \mathcal{C}(X)$; отображение $u \mapsto \tilde{f}$ определяет естественный морфизм $\mathcal{F}_0(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$.

3) Этот морфизм есть мономорфизм.

Доказательство. 1) Достаточно рассмотреть случай, когда (2.10) имеет вид

$$u(v, x) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r(x)}{v^r} e^{v\varphi(x)}. \quad (2.12)$$

Для любой $g \in \mathcal{B}(X)$, равной нулю вне некоторого компакта из X , рассмотрим норму

$$|g|_r = \sup_{v, x, s} \left| \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^s g \right|, \text{ где } v \in \mathbb{I}, x \in X, |s| \leq r. \quad (2.13)$$

Выберем возрастающую числовую последовательность

$$0 \leq \mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots,$$

такую, что

$$2^r |\alpha_r e^{v\varphi}|_r \leq \mu_r, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mu_r = \infty, \quad (2.14)$$

и выберем, далее, последовательность непрерывных функций $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$, таких, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varepsilon_r(v) \leq 1, \\ \varepsilon_r(v) &= 0 \quad \text{для } |v| \leq \mu_r, \\ \varepsilon_r(v) &= 1 \quad \text{для } |v| \geq 2\mu_r. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Определим теперь

$$f(v, x) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r(v) \frac{\alpha_r(x)}{v^r} e^{v\varphi(x)}, \quad (2.16)$$

Этот ряд сходится потому, что в силу вторых условий из формул (2.14) и (2.15) на каждом ограниченном промежутке изменения v он имеет конечное число членов отличных от нуля.

Обозначим аналогично (2.11)

$$u_N(v, x) = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{\alpha_r(x)}{v^r} e^{v\varphi(x)}. \quad (2.17)$$

В силу третьего условия из (2.15) для $|v| \geq 2\mu_N$

$$|f(v) - u_{N+1}(v)|_N \leq \sum_{r=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_r(v)}{|v|^r} |\alpha_r e^{v\varphi}|_r.$$

Но из первых условий (2.14) и (2.15) и второго условия (2.15) следует, что

$$\varepsilon_r(v) 2^r |\alpha_r e^{v\varphi}|_r \leq |v|,$$

откуда (для $|v| \geq 2\mu_N$)

$$|f(v) - u_{N+1}(v)|_N \leq \sum_{r=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^r |v|^{r-1}} = \frac{1}{2^N |v|^N} \frac{1}{2 - \frac{1}{|v|}} \leq \frac{1}{|v|^N}$$

(так как $|v| \geq 1$). Отсюда

$$|f - u_N|_N = 0 \pmod{\frac{1}{v^N}}. \quad (2.18)$$

Докажем более общее утверждение

$$\forall M, N \in \mathbb{N} \quad |f - u_N|_M = 0 \pmod{\frac{1}{v^N}}. \quad (2.19)$$

Если $M \leq N$, формула (2.19) следует из (2.18) и роста $|\cdot|_M$ с ростом M .

Если $M > N$, формула (2.19) следует из того, что

$$|f - u_N|_M \leq |f - u_M|_M + |u_M - u_N|_M; \quad |f - u_M|_M = 0 \pmod{\frac{1}{v^M}}$$

$$\text{и, следовательно, } |f - u_M| = 0 \pmod{\frac{1}{v^N}}; \quad |u_M - u_N|_M = 0$$

$$\pmod{\frac{1}{v^N}}, \text{ так как } u_M - u_N = \sum_{r=N}^{M-1} \frac{\alpha_r}{v^r} e^{v\varphi}, \text{ ч. и т. д.}$$

Так как носители f и u_N принадлежат $\text{supp } u = \overline{\bigcup_r \text{supp } \alpha_r}$, т. е. компактному множеству, то из (2.19) следует

$$\forall M, N \in \mathbb{N} \quad |x^q (f - u_N)|_M = 0 \pmod{\frac{1}{v^N}}.$$

Следовательно, $f \in \mathcal{B}(X)$ и $f - u_N = 0 \pmod{\frac{1}{v^N}}$.

2) Если f и $f' \in \mathcal{B}(X)$ и удовлетворяют условиям

$$\forall N \quad f - u_N = f' - u_N = 0 \pmod{\frac{1}{v^N}},$$

то, очевидно, $f - f' = 0 \pmod{\frac{1}{v^N}}$.

3) Предположим, что

$$u \mapsto \tilde{f} = 0,$$

т. е. для любого $N \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$

$$u_N(v, x) = 0 \pmod{\frac{1}{v^N}}.$$

Нужно доказать, что $\forall x \in X$ $u(v, x) = 0$. Достаточно рассмотреть случай, когда u — формальное число. Предположим, что в выражении (2.1)

$$\forall i \in J, \quad \alpha_{jr} = 0 \quad \text{для } r < N.$$

Мы имеем тогда

$$u_{N+1}(v) = \sum_{j \in J} \frac{\alpha_{jN}}{v^N} e^{v\varphi_j} = 0 \pmod{\frac{1}{v^{N+1}}}.$$

Отсюда $\lim_{v \rightarrow i\infty} \sum_{j \in J} \alpha_{jN} e^{v\varphi_j} = 0$, т. е. $\forall j$ $\alpha_{jN} = 0$, чем и завершается доказательство теоремы 2.2.

Следствие 2. Асимптотическое интегрирование, элементы $Sr_2(l)$ и дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами представляют собой морфизмы

$$\mathcal{F}_0(X) \rightarrow \mathcal{C}; \quad \mathcal{F}_0(X) \rightarrow \mathcal{C}(X); \quad \mathcal{F}_0(X) \rightarrow \mathcal{F}_0(X).$$

В конце этого параграфа будут выяснены свойства этих морфизмов.

Для изучения нормы лагранжевых функций в п. 3 § 2 будет использована следующая

Теорема 2.3. 1) Пусть u — формальное число с нулевой фазой

$$u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r}{v^r} \in \mathcal{F}^0.$$

Условие того, что это число вещественно, т. е. что $u \in \text{Re } \mathcal{F}^0$, таково:

$$\forall r \quad \frac{\alpha_r}{v^r} \text{ вещественно, т. е. } i^{-r}\alpha_r \text{ вещественно.}$$

Условие того, что $u > 0$, таково: если обозначить через s наименьшее значение r , для которого $\alpha_r \neq 0$, то

$$0 < \frac{\alpha_s}{v^s}, \text{ т. е. } i^{-s}\alpha_s > 0.$$

Таким образом, всякое $u \in \text{Re } \mathcal{F}^0$ удовлетворяет одному из условий:

$$u > 0 \quad \text{или} \quad u \leq 0.$$

Неравенство $\geq$ устанавливает, следовательно, отношение порядка на $\text{Re } \mathcal{F}^0$.

2. Условие $u^{1/2} \in \operatorname{Re} \mathcal{F}^0$ эквивалентно следующему: $u \in \mathcal{F}^0$ и $u > 0$; число s , определенное выше, четно.

Обозначение: $u^{1/2}$ имеет тогда два определения. Мы будем выбирать $u^{1/2} \geq 0$.

Доказательство. Пусть $u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r}{v^r} \in \mathcal{F}^0$. Обозначим че-

рез s наименьшее значение r , такое, что $\alpha_r \neq 0$.

Если $\forall r \alpha_r v^{-r}$ действительны, то функция, построенная по данному u при доказательстве теоремы 2.2, будет принимать действительные значения. Следовательно, $u \in \operatorname{Re} \mathcal{F}^0$. Отсюда имеем в общем случае

$$\operatorname{Re} u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \operatorname{Re} \frac{\alpha_r}{v^r}, \quad \operatorname{Im} u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \operatorname{Im} \frac{\alpha_r}{v^r}.$$

Следовательно, $u \in \operatorname{Re} \mathcal{F}^0$ в том и только том случае, если $\forall r \frac{\alpha_r}{v^r}$ вещественно.

Изучим $u^{1/2}$:

$$u^2 = \frac{\alpha_s^2}{v^{2s}} \left(\bmod \frac{1}{v^{2s+1}} \right).$$

Следовательно, если $u^{1/2} \in \operatorname{Re} \mathcal{F}^0$, то s четно, $\frac{\alpha_s}{v^s} > 0$ и $u \in \operatorname{Re} \mathcal{F}^0$ (см. замечание 1).

Чтобы доказать обратное, достаточно, очевидно, показать, что когда $\alpha_0 > 0$ и $u \in \operatorname{Re} \mathcal{F}^0$, то $u^{1/2} \in \operatorname{Re} \mathcal{F}^0$.

Но это очевидно, так как из условия

$$\left(\sum_r \frac{\beta_r}{v^r} \right)^2 = \sum_r \frac{\alpha_r}{v^r}$$

следует, что $\beta_0^2 = \alpha_0$ и для каждого $r = 1, 2, \dots$ $\beta_0 \beta_r$ есть линейные функции α_r и $\beta_t \beta_{r-t}$ ($0 < t < r$). Но из $u^{1/2} \in \operatorname{Re} \mathcal{F}^0$ следует $u \geq 0$ (ср. замечание 1). Следовательно, если $u \in \operatorname{Re} \mathcal{F}^0$, то из того, что $\alpha^s v^{-s} > 0$, вытекает, что $u > 0$.

Всякое $u \in \operatorname{Re} \mathcal{F}^0$ удовлетворяет, следовательно, одному из условий: $u > 0$ или $u \leq 0$.

3. Интегрирование элементов $\mathcal{F}_0(X)$

Существенные свойства формальных функций будут выведены из следующей теоремы, которая уточняет классические результаты (метод стационарной фазы). Эти уточнения нуждаются в применении лемм 3.4 и 3.5 вместо теоремы М. Морса [12], которая с помощью замены координат локально преобразует функцию, имеющую невырожденную

критическую точку, в квадратичную форму. Мы коротко напомним другие леммы, необходимые для доказательства теоремы этого пункта.

В силу следствия 2 асимптотическое интегрирование есть морфизм

$$\tilde{\int}_X : \mathcal{F}_0(X) \rightarrow \mathcal{C}.$$

Очевидно, когда все фазы и постоянны:

$$\tilde{\int}_X u(v, x) d^l x \in \mathcal{F}.$$

Из сформулированной ниже теоремы 3 будет следовать, что в важном частном случае, указанном в следствии 3, справедливо, что

$$v^{l/2} \tilde{\int}_X u(v, x) d^l x \in \mathcal{F}.$$

Теорема 3. Пусть $u \in \mathcal{F}_0(X)$.

1. Значение $\tilde{\int}_X u(v, x) d^l x$ зависит только от ограничения u на произвольно малую окрестность множества критических точек фаз u . $\tilde{\int}_X u(v, x) d^l x = 0$, если это множество пусто.

2. Пусть

$$u(v) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r}{v^r} e^{v\varphi} \in \mathcal{F}_0(X), \quad (3.1)$$

где φ имеет на $\text{supp } u$ одну невырожденную критическую точку x_c . Обозначим

$$\varphi_c = \varphi(x_c)$$

критическое значение φ ; $\arg i^{l/2} = \pi \frac{l}{4}$; значение $\sqrt{\text{Hess } \varphi}$ в точке c обозначим $\sqrt{\text{Hess}_c \varphi}$ (определение 2.3 гл. I, § 1). Тогда

$$\tilde{\int}_X u(v, x) d^l x = \left(\frac{2\pi i}{|v|} \right)^{l/2} (\text{Hess}_c \varphi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} I_r(\varphi; \alpha) e^{v\varphi_c}, \quad (3.2)$$

где

$$I_0(\varphi, \alpha) = \alpha_0(x_c), \quad (3.3)_0$$

$$I_r(\varphi, \alpha) = \sum_{s=0}^r \sum_{j=0}^{2(r-s)} \frac{1}{(r-s+j)!j!} \left\{ \Phi^{*r-s+j} \frac{\partial}{\partial x} [\theta^j(x) \alpha_s(x)] \right\}_{x=x_c}, \quad (3.3)_r$$

Φ , Φ^* , и θ определяются следующим образом.

Обозначения. Разложение Тейлора функции φ в точке x_c запишем так:

$$\varphi(x) = \varphi_c + \Phi(x - x_c) + \Theta(x), \quad (3.4)$$

где Φ — квадратичная форма $\Theta(x)$ — имеет нуль порядка 3 в точке x_c , Φ^* — форма, «двойственная» к Φ , т. е. такая, что $\Phi^*(p)$ есть критическое значение функции

$$x \mapsto \Phi(x) + \langle p, x \rangle. \quad (3.5)$$

Другими словами, если M есть значение в точке x_c матрицы $(\varphi_{x^i x^k})$, то

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \langle Mx, x \rangle, \quad \Phi^*(p) = -\frac{1}{2} \langle p, M^{-1}p \rangle, \quad (3.6)$$

где $M = {}^t M : X \rightarrow X^*$.

Очевидно, имеет место

Следствие 3. Пусть $u \in \mathcal{F}_0(X)$. Если на $\text{supp } u$ все критические точки всех фаз u не вырождены, то

$$v^{l/2} \int_{\tilde{X}} u(v, x) d^l x \in \mathcal{F}.$$

Фазы $v^{l/2} \int_{\tilde{X}} u d^l x$ есть критические значения на $\text{supp } u$ фаз u .

Теорему 3 достаточно, очевидно, доказать для случая, когда u заменено функцией f :

$$f(v, x) = \alpha(x) e^{v\varphi(x)}, \quad (3.7)$$

где $\alpha \in \mathcal{D}(X)$ (т. е. α — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем). Эта теорема вытекает тогда из следующих лемм, первая из которых доказывает первое утверждение теоремы.

Лемма 3.1. Обозначим x_c критические точки φ , принадлежащие $\text{supp } f$. Если все они не вырождены, то

$$\int_X \alpha(x) e^{v\varphi(x)} d^l x \left(\text{mod } \frac{1}{v^N} \right)$$

есть линейная функция от значений производных α порядков $< 2N$ в точках x_c .

Доказательство. Достаточно доказать следующее: если α имеет в точках x_c нуль порядка $2N$, то

$$\int_X f d^l x = 0 \pmod{\frac{1}{v^N}}. \quad (3.8)$$

Утверждение $(3.8)_0$ очевидно. Предположим, что имеет место $(3.8)_N$. Если α имеет в точках x_c нуль порядка $2(N+1)$, то существуют $\beta_j \in \mathcal{D}$, такие, что $\alpha = \sum_j \beta_j \varphi_{x^j}$, β_j имеют в точках x_c нуль порядка $2N+1$.

Следовательно, в силу $(3.8)_N$

$$\int_X \alpha e^{v\varphi} d^l x = - \int_X \frac{1}{v} \sum_j \frac{\partial \beta_j}{\partial x^j} e^{v\varphi} d^l x = 0 \pmod{\frac{1}{v^{N+1}}}$$

что доказывает $(3.8)_{N+1}$.

Так же доказывается

Лемма 3.2. Пусть $\alpha \in \mathcal{S}(X)$ (пространство Л. Шварца, см. гл. 1, § 1, п. 1). Пусть, далее, Φ — невырожденная квадратичная форма: $X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\int_X \alpha(x) e^{v\Phi(x)} d^l x \pmod{\frac{1}{v^N}}$$

есть линейная функция от значений в точке 0 производных α порядка $< 2N$.

Эта лемма вытекает из следующего более точного утверждения.

Лемма 3.3. Пусть $\alpha \in \mathcal{S}(X)$. Пусть Φ — невырожденная квадратичная форма: $X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_X \alpha(x) e^{v\Phi(x)} d^l x &= \\ &= \left(\frac{2\pi i}{|v|} \right)^{l/2} [\text{Hess } \Phi]^{-\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{r! v^r} \left[\Phi^{*r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha(x) \right]_{x=0} \pmod{\frac{1}{v^\infty}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Известно (ср. гл. 1, § 1, доказательство леммы 2.2), что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mu}{2} x^2} dx = \sqrt{2\pi} \mu^{-\frac{1}{2}} \quad \text{для } |\arg \mu| < \frac{\pi}{2}.$$

Откуда, дифференцируя по μ , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r} e^{-\frac{\mu}{2} x^2} dx = \sqrt{2\pi} \frac{\mu^{-\frac{1}{2}}}{(2\mu)^r} \frac{(2r)!}{r!} = \sqrt{2\pi} \mu^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2}} x^{2r} \right]_{x=0}.$$

$$\text{Но } \forall r \in \mathbb{N} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2r+1} e^{-\frac{\mu x^2}{2}} dx = 0.$$

Следовательно, для любой комплексной диагональной $l \times l$ матрицы M_c с ненулевыми собственными значениями, аргументы которых принадлежат интервалу $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, и для любого многочлена $P: X \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_X P(x) e^{-\Phi_c(x)} d^l x = (2\pi)^{\frac{l}{2}} [\text{Hess } \Phi_c]^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\Psi_c \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)} P(x) \right]_{x=0}, \quad (3.9)$$

где $\Phi_c(x) = \frac{1}{2} \langle M_c x, x \rangle$, $\Psi_c(p) = \frac{1}{2} \langle p, M_c^{-1} p \rangle$. $\arg \text{Hess } \Phi_c$ есть сумма $\arg$ собственных значений Φ_c .

Положим

$$\Phi_c = \Phi_+ - \nu \Phi,$$

где $\nu \in i[1, \infty]$, Φ_+ и Φ — квадратичные формы $X \rightarrow \mathbb{R}$, не зависящие от ν , Φ_+ положительно определена; мы предположим, что Φ не вырождена.

Предположение о том, что матрица M_c диагональна, несущественно, так как заменой переменных можно привести обе формы к виду

$$\Phi_+(x) = \sum_j x_j^2, \quad \Phi(x) = \sum_j c_j x_j^2 \quad (c_j \neq 0).$$

Пусть $\varepsilon \in \mathcal{D}$ таково, что $\varepsilon(x) = 1$ в некоторой окрестности нуля. Из леммы 3.2 и формулы (3.9) следует

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\nu}{2\pi} \right)^{l/2} \int \varepsilon(x) P(x) e^{\nu \Phi(x) - \Phi_+(x)} d^l x = \\ & = [\text{Hess} \left(\Phi - \frac{1}{\nu} \Phi_+ \right)]^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\Psi_c \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)} P(x) \right]_{x=0} \pmod{\frac{1}{\nu^\infty}}; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$\arg \text{Hess} \left(\Phi - \frac{1}{\nu} \Phi_+ \right)$ равен сумме аргументов собственных значений $\Phi - \frac{1}{\nu} \Phi_+$, которые принадлежат интервалу $]0, \pi[$; $-\nu = \frac{|\nu|}{i}$ имеет аргумент $= -\frac{\pi}{2}$.

Правая часть этой формулы есть функция $\frac{1}{v}$, голоморфная при $\frac{1}{v} = 0$, следовательно, по mod $\frac{1}{v^\infty}$ это есть элемент $\mathcal{F}$.

Из разложения Тейлора этой функции следует, что ее предел при $\Phi_+ \rightarrow 0$ равен

$$[\text{Hess } \Phi]^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\frac{1}{v} \Phi^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)} P(x) \right]_{x=0} \left(\text{mod } \frac{1}{v^\infty} \right).$$

$\arg \text{Hess } \Phi$ определен в гл. I, § 1 (определение 2.3).

Левая часть (3.10) есть, следовательно, по mod $\frac{1}{v^\infty}$ элемент $\mathcal{F}$.

В силу леммы 3.2 предел этой функции при $\Phi_+ \rightarrow 0$ есть

$$\left(\frac{|v|}{2\pi i} \right)^{l/2} \int_X \varepsilon(x) P(x) e^{v\Phi(x)} d^l x.$$

Следовательно,

$$\int_X \varepsilon(x) P(x) e^{v\Phi(x)} d^l x = \left(\frac{2\pi i}{|v|} \right)^{l/2} [\text{Hess } \Phi]^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\frac{1}{v} \Phi^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)} P(x) \right]_{x=0}. \quad (3.11)$$

Откуда, аппроксимируя α вблизи 0 многочленом Тейлора P и применяя лемму 3.2, получаем лемму 3.3.

Лемма 3.3 доказывает утверждение 2) теоремы 3 в частном случае, когда фаза φ есть квадратичная форма. Мы выведем общий случай из этого частного, применяя к остаточному члену разложения Тейлора следующую лемму, доказательство которой аналогично доказательству леммы 3.1.

Лемма 3.4. Пусть

$$\vartheta \in [0, 1]; \quad x \in X,$$

$$\alpha : (\vartheta, x) \mapsto \alpha(\vartheta, x) \in \mathbb{C}$$

— бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, имеющая при $x = 0$ нуль порядка $2N$;

$$\varphi : (\vartheta, x) \mapsto \varphi(\vartheta, x) \in \mathbb{R}$$

— бесконечно дифференцируемая функция, имеющая при $\forall \vartheta$ единственную на множестве $\text{supp } \alpha$ невырожденную особенность в точке $x = 0$. Тогда

$$\int_0^1 d\vartheta \int_X \alpha(\vartheta, x) e^{v\varphi(\vartheta, x)} d^l x = 0 \left(\text{mod } \frac{1}{v^N} \right). \quad (3.12)$$

Из этой леммы мы выведем следующую:

Лемма 3.5. Пусть $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая функция, имеющая при $x = 0$ единственную (невыврожденную) особую точку и такая, что

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi_x(0) = 0, \quad \text{Hess } \varphi(0) \neq 0.$$

Пусть, далее,

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \Theta(x)$$

ее разложение Тейлора вблизи нуля; $\Phi(x)$ — квадратичная форма. $\Theta(x)$ имеет в нуле нуль не ниже 3-го порядка.

Пусть $\alpha: X \rightarrow \mathbb{C}$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, не содержащим других особых точек, кроме начала координат. Тогда

$$\int_X \alpha(x) e^{v\varphi(x)} d^l x = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{v^s}{s!} \int_X \Theta^s(x) \alpha(x) e^{v\Phi(x)} d^l x \pmod{\frac{1}{v^\infty}}. \quad (3.13)$$

Этот ряд сходится в $\mathcal{F}$, потому что в силу леммы (3.3)

$$v^j \int_X \Theta^j(x) \alpha(x) e^{v\Phi(x)} d^l x = 0 \pmod{v^{-\frac{l}{2} - [\frac{j+1}{2}]}}.$$

[...] — целая часть ..., т. е. наибольшее целое число $\leq \dots$.

Доказательство. В силу (3.12) и формулы Тейлора мы имеем

$$e^{v\varphi} = \sum_{j=1}^{2N-1} \frac{v^j \Theta^j}{j!} e^{v\Phi} + v^{2N} \int_0^1 \frac{(1-\vartheta)^{2N-1}}{(2N-1)!} \Theta^{2N} e^{v(\Phi+\vartheta\Theta)} d\vartheta. \quad (3.14)$$

Лемма 3.4 дает

$$v^{2N} \int_X d^l x \int_0^1 (1-\vartheta)^{2N-1} \Theta^{2N}(x) \alpha(x) e^{v(\Phi+\vartheta\Theta)} d\vartheta = 0 \pmod{\frac{1}{v^N}}, \quad (3.15)$$

потому что Θ^{2N} имеет при $x = 0$ нуль порядка $\geq 6N$. Когда $N \rightarrow \infty$, из (3.14) и (3.15) получаем (3.13).

Доказательство п. 2) теоремы 3. Заменяем u функцией f по формуле (3.7). Пусть φ имеет одну невырожденную критическую точку. Достаточно рассмотреть случай, когда $x = 0$ и $\varphi(0) = 0$. Тогда в силу формулы (3.13) и леммы 3.3

$$\begin{aligned} \int_X \alpha(x) e^{v\varphi(x)} d^l x &= \\ &= \left(\frac{2\pi i}{|v|} \right)^{l/2} (\text{Hess } \Phi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{r,j} \frac{1}{r! j! v^{r-j}} \left\{ \Phi^{*r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) [\Theta^j(x) \alpha(x)] \right\}_{x=0} \\ &\quad \pmod{\frac{1}{v^\infty}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $r, j \in \mathbb{N}$. Обозначим показатель $r - j = q$. Так как $\Theta(x) = 0 \pmod{|x|^3}$, то из условия $\{\dots\}_{x=0} \neq 0$ следует, что $3j \leq 2r$, т. е. $j \leq 2q$. Пусть

$$I_q(\varphi; \alpha) = \sum_{j=0}^{2q} \frac{1}{(q+j)! j!} \left\{ \Phi^{*q+j} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) [\Theta^j(x) \alpha(x)] \right\}_{x=0},$$

т. е., в частности,

$$I_0(\varphi, \alpha) = \alpha(0).$$

Формула (3.16) запишется тогда в виде

$$\int_{\check{X}} \alpha(x) e^{v\varphi(x)} d^l x = \left(\frac{2\pi i}{|v|} \right)^{l/2} (\text{Hess } \Phi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^q} I_q(\varphi; \alpha).$$

откуда следует утверждение 2) теоремы 3.

4. Преобразование формальных функций элементами $Sp_2(l)$

Всякое $S \in Sp_2(l)$ индуцирует изоморфизм

$$S: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X), \quad (\text{см. п. 1})$$

ограничение которого на $\mathcal{F}_0(X) \subset \mathcal{C}(X)$ есть *мономорфизм* (см. теорему 2.2)

$$S: \mathcal{F}_0(X) \rightarrow \mathcal{C}(X). \quad (4.1)$$

Теоремы 4.1, 4.2 и 4.3 уточняют свойства этого мономорфизма.

Теорема 4.1. Пусть Z — 2-симплектическое пространство, $V \subset Z$ — лагранжево многообразие, R' — репер Z и

$$S \in Sp_2(l),$$

$R = SR'$ есть, следовательно, также репер Z (см. гл. I, § 3, п. 3).

1) Существует индуцированный S изоморфизм, который мы также обозначим S :

$$S: \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R') \rightarrow \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cap \check{\Sigma}_{R'}, R), \quad (4.2)$$

характеризующийся двумя следующими свойствами:

(i) этот изоморфизм локален, т. е. если

$$\check{U}_{R'} \in \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R') \quad \check{U}_R = S\check{U}_{R'} \in \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cap \check{\Sigma}_{R'}, R),$$

то значения $\check{U}_R(v, \check{z})$ функции $\check{U}_R$ в точке $\check{z} \in \check{V}$ есть линейная функция значений $\check{U}_{R'}$ и ее производных в той же точке $\check{z}$.

(ii) Коммутативна следующая диаграмма:

$$\mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R') \xrightarrow{S} \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R) \quad (4.2)$$

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{R'} \downarrow & & \Pi_R \downarrow \\ \mathcal{F}_0(X) & \xrightarrow{S} & \mathcal{C}(X), \end{array} \quad (4.1)$$

следовательно, определен морфизм

$$S \circ \Pi_{R'} = \Pi_R \circ S : \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R') \rightarrow \mathcal{C}(X), \quad (4.3)$$

2) Закон композиции морфизмов (4.1) и (4.2) есть закон композиции элементов $Sp_2(l)$.

Замечание 4. Ограничение отображения (4.1)

$$S : \Pi_{R'} \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R') \rightarrow \Pi_R \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R) \subset \mathcal{F}_0(X) \quad (4.4)$$

есть, следовательно, изоморфизм. В то время как (4.2) — локальное отображение, (4.4) есть просто точечное отображение; если

$$u' \in \Pi_{R'} \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R') \quad u = Su',$$

то значение $u(v, x)$ в точке $x \in X$ есть линейная функция значений u' и ее производных в точках конечного множества $R'_X R_X^{-1}x$.

Локальный характер морфизма (4.2) уточняется следующим образом.

Теорема 4.2. Пусть

$$\check{U}_{R'} = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} \alpha_r e^{v\varphi_{R'}} \in \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R'). \quad (4.5)$$

Тогда

$$\check{U}_R = S\check{U}_{R'} \in \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R), \text{ где } R = SR'$$

имеет в $\check{z}$ следующее значение:

$$\check{U}_{R'}(v, \check{z}) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \left(\frac{d^l x'}{d^l x} \right)^{3r + \frac{1}{2}} \frac{1}{v^r} J_{R,r}(\check{z}; \alpha) e^{v\varphi_R(\check{z})}, \quad (4.6)$$

где

$$x = \check{R}_x \check{z}; \quad x' = \check{R}'_x \check{z}, \quad (4.7)$$

где $[d^l x]^{1/2}$ определено в гл. I, § 3, следствие 3; $J_{R,r}$ есть линейная функция производных порядка $\leq 2(r-s)$ на V функций α_s , $s \leq r$; коэффициенты этой линейной функции — бесконечно дифференцируемые функции $\check{z} \in \check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'}$. Эти коэффициенты зависят от V , R' и S :

$$J_{R,0}(\check{z}, \alpha) = \alpha_0(\check{z}). \quad (4.8)$$

Формула (4.6) имеет смысл для всех $\check{U}_{R'} \in \mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'}, R')$ и $\check{z} \in \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}$. Отсюда следует, очевидно,

Теорема 4.3. Формула (4.6) определяет изоморфизм, индуцированный S и обозначаемый также S :

$$S: \mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R') \rightarrow \mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R). \quad (4.9)$$

Закон композиции таких изоморфизмов тот же, что в группе $Sp_2(l)$.

Доказательство этих теорем. Пусть $\check{U}_{R'} \in \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R')$ такова, что ограничение

$$\check{R}'_X: \text{supp } \check{U}_{R'} \rightarrow X \text{ отображения } \check{R}'_X: \check{V} \rightarrow X$$

есть диффеоморфизм, обратный к которому $\check{R}'_X{}^{-1}$.

Случай, когда $S \notin \Sigma_{Sp_2}(l)$. Тогда $S = S_A$ (гл. I, §1, п. 1). Пусть $\check{U}_{R'}$ задано формулой (4.5). Тогда

$$u' = \Pi_{R'} \check{U}_{R'}$$

имеет в точке x' значение

$$u'(v, x') = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} \alpha'_r(x') e^{v\varphi'(x')}, \quad (4.10)$$

где $\alpha'_r(x') = \alpha_r(R'^{-1}_X x')$, $\varphi'(x') = \varphi_{R'}(R'^{-1}_X x')$ для $x' \in \text{supp } u'$,

$$\alpha'_r(x') = 0 \quad \text{для } x' \notin \text{supp } u' = R'_X \text{supp } \check{U}_{R'}.$$

Так как $u' \in \mathcal{F}_0(X) \subset \mathcal{C}(X)$, то $u = Su' \in \mathcal{C}(X)$.

В силу гл. I, § 1, (1.10) выражение u в точке x имеет вид

$$u(v, x) = \left(\frac{|v|}{2\pi i} \right)^{l/2} \Delta(A) \int_{\check{X}} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} \alpha'_r(x') e^{v[A(x, x') + \varphi'(x')]} d^l x'. \quad (4.11)$$

Применим к этому асимптотическому интегралу теорему 3.

(i) Для каждого $x \in X$ найдем на $\text{supp } u'$ критические точки фазы

$$X \ni x' \mapsto A(x, x') + \varphi'(x') \in \mathbb{R}, \quad (4.12)$$

т. е. точки $x' \in \text{supp } u'$, в которых

$$A_{x'} + \varphi'_{x'} = 0. \quad (4.13)$$

Обозначим

$$\check{z} = \check{R}'_x{}^{-1}x', \quad \check{R}'\check{z} = (x', p'), \quad \text{т. е. } p' = \varphi'_{x'} \in X^*. \quad (4.14)$$

Формула (4.13) запишется тогда так:

$$p' + A_{x'} = 0.$$

В силу гл. I, § 1, (1.11) это равенство означает существование $p \in X^*$, такого, что

$$(x, p) = s_A(x', p').$$

Оно эквивалентно, следовательно, тому, что

$$x = R_x R'^{-1}(x', p') = \check{R}_x \check{R}'^{-1}(x', p'),$$

т. е. в силу (4.14)

$$x = \check{R}_x \check{z}.$$

Показано, таким образом, что критические точки фазы (4.12) на $\text{supp } u'$ это точки вида

$$x' = \check{R}'_x \check{z}, \quad \text{где } \check{z} \in \check{R}_x^{-1}x \cap \text{supp } U_{R'}. \quad (4.15)$$

Множество таких точек конечно, так как $\text{supp } \check{U}_{R'}$ есть компактная часть $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$, в окрестности которой $\check{R}_x$ есть локальный диффеоморфизм.

(ii) Найдем критические значения фазы (4.12). В критической точке x' , определенной формулой (4.15), обозначим

$$\check{R}\check{z} = (x, p), \quad \check{R}'\check{z} = (x', p').$$

Согласно предыдущим формулам,

$$p = A_x; \quad p' = -A_{x'}.$$

Так как A — квадратичная форма от (x, x') , мы имеем, следовательно,

$$A(x, x) = \frac{1}{2} \langle p, x \rangle - \frac{1}{2} \langle p', x' \rangle,$$

т. е., согласно гл. I, § 3, (2.4),

$$A(x, x') = \varphi_R(\check{z}) - \varphi_{R'}(\check{z}), \quad \text{где } \varphi_{R'}(\check{z}) = \varphi'(x').$$

Значение фазы (4.12) в критической точке x' , определенной формулой (4.15), равно, следовательно, $\varphi_R(\check{z})$.

(iii) Квадратный корень из *гессиана* этой фазы (4.12) задается, согласно гл. I, § 3, (3.7), выражением

$$\{\text{Hess}_{x'}[A(x, x') + \varphi'(x')]\}^{1/2} = \Delta(A) \left[\frac{d^l x}{d^l x'} \right]^{1/2}. \quad (4.16)$$

При вычислении $\text{Hess}_{x'}$ x и x' рассматриваются как независимые, а затем им придано значение $x = \check{R}_x \check{z}$, $x' = \check{R}'_x \check{z}$. Справа x и x' имеют те же значения, т. е. являются локальными координатами одной и той же точки $\check{z} \in \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}$. Из формулы (4.16) следует, таким образом, что

$$\text{Hess}_{x'}[A(x, x') + \varphi'(x')] \neq 0.$$

Следовательно, к вычислению интеграла (4.11) применима теорема 3.

(iv) *Конец доказательства.* Применение теоремы 3 к формуле (4.11) дает

$$u(v, x) = \sum_{\check{z} \in \check{R}_X^{-1} x} \check{U}_R(v, \check{z}), \quad (4.17)$$

где носитель $\check{U}_R$ совпадает с носителем $\check{U}_{R'}$, и обозначая $x = \check{R}_x \check{z}$ и $x' = \check{R}'_x \check{z}$, имеем для $\check{U}_R$ в точке $\check{z}$ выражение

$$\check{U}_R(v, \check{z}) = \Delta(A) [\text{Hess}_{x'}(A + \varphi')]^{-\frac{1}{2}} \sum_{r \in N} \frac{1}{v^r} I_r(A + \varphi'; \alpha') e^{v \varphi_R(\check{z})}. \quad (4.18)$$

Но, с одной стороны, формула (4.17) означает, что

$$u = \Pi_R \check{U}_R;$$

с другой стороны, в силу (4.16), (4.18) эквивалентно (4.6). Действительно, согласно (3.3)_r, $I_r(A + \varphi'; \alpha')$ есть значение линейной функции от частных производных порядков $\leq 2(r - s)$ функций α'_s ($s \leq r$). Коэффициенты этих функций — рациональные функции от производных φ' , общий знаменатель которых $[\text{Hess}_{x'}(A + \varphi')]^{3r}$ (см. формулу (4.16)).

Следовательно, теоремы 4.1 и 4.2 имеют место для $S_A \in \in Sp_2(l) \setminus \Sigma_{Sp_2}$.

Случай, когда $S \in \Sigma_{Sp_2}$. В силу гл. I, § 1 (лемма 2.5), если задано $S \in \Sigma_{Sp_2}$, существуют S_A и $S_{A'} \in Sp_2(l) \setminus \Sigma_{Sp_2}$, такие, что

$$S = S_{A'} S_A.$$

Так как морфизмы (4.1) и (4.2) перемножаются как элементы $Sp_2(l)$, которыми они индуцированы, композиция морфизмов, индуцированных S_A и $S_{A'}$, зависит только от $S = S_{A'} S_A$, и, следовательно, это морфизмы, индуцированные S . Если задана $\check{U}_{R'}$, такая что $\text{supp } \check{U}_{R'} \subset \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{SR'}$, то

можно выбрать S_A достаточно близко к тождественному преобразованию для того, чтобы $\check{\Sigma}_{S_A R'} \cap \text{supp } \check{U}_R = \emptyset$. Отсюда теоремы 4.1, 4.2 и вытекающая из них теорема 4.3.

5. Скалярное произведение и норма формальных функций с компактным носителем

Пусть V и V' — два лагранжевых многообразия в Z ; $\check{V}$ и $\check{V}'$ — их универсальные накрытия; R — 2-репер в Z ; φ_R и φ'_R — фазы RV и RV' . Пусть, далее, $\check{U}_R$ и $\check{U}'_R$ — формальные функции с компактным носителем:

$$\begin{aligned} \check{U}_R &= \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} \alpha_{R,r} e^{v\varphi_R} \in \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R), \\ \check{U}'_R &= \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^s} \alpha'_{R,s} e^{v\varphi'_R} \in \mathcal{F}_0(\check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R, R), \end{aligned} \quad (5.1)$$

u и u' — их проекции:

$$u = \Pi_R \check{U}_R, \quad u' = \Pi_R \check{U}'_R.$$

Определение 5.1. В предположении (5.1) скалярное произведение $\check{U}_R$ и $\check{U}'_R$ есть асимптотический класс

$$(\check{U}_R | \check{U}'_R) = (u | u') \in \mathcal{C}, \quad (5.2)$$

где $(u | u')$ определено асимптотическим интегралом (1.9). Из определения следует

$$(\check{U}_R | \check{U}'_R) = \overline{(\check{U}'_R | \check{U}_R)} \quad (\text{комплексно-сопряжены}).$$

Справедливо неравенство Шварца

$$|(\check{U}_R | \check{U}'_R)| \leq (\check{U}_R | \check{U}_R)^{1/2} (\check{U}'_R | \check{U}'_R)^{1/2}. \quad (5.3)$$

Полунорма $\check{U}_R$ есть $(\check{U}_R | \check{U}_R)^{1/2} = \|u\| \geq 0$.

Эта полунорма удовлетворяет неравенству треугольника.

Теорема 5.1. 1) Значение $(\check{U}_R | \check{U}'_R)$ зависит только от поведения $\check{U}_R$ и $\check{U}'_R$ в парах точек $\check{V}$ и $\check{V}'$, проектирующихся в одну и ту же точку $V \cap V'$. Это значение = 0, если $V \cap V' = \emptyset$.

2) Если $V = V'$ и тем самым $\varphi_R = \varphi'_R$, то

$$(\check{U}_R | \check{U}'_R) = \sum_{r,s} \frac{(-1)^s}{v^{r+s}} \int \sum_{z \in V} \alpha_{R,r}(z) \overline{\alpha'_{R,s}(z')} e^{v[\psi(z) - \psi(z')]} d^l x \in \mathcal{F}, \quad (5.4)$$

где $x = R_x z$, $d^l x > 0$; $\check{z}$ и $\check{z}'$ — точки $\text{supp } \check{U}_R$ и $\text{supp } \check{U}'_R$, проектирующиеся в z .

В формуле (5.4) $\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')$ — один из периодов ψ :

$c_\gamma = \frac{1}{2} \int_\gamma [z, dz]$, где γ — замкнутая кривая в V . Фазами

$(\check{U}_R | \check{U}'_R)$ являются, следовательно, эти периоды c_γ функции ψ .

3) Если V и V' трансверсальны, то

$$v^{l/2} (\check{U}_R | \check{U}'_R) \in \mathcal{F}. \quad (5.5)$$

Если V и V' трансверсальны и пересекаются в единственной точке z — проекции одной точки $\check{z} \in \text{supp } \check{U}_R$ и одной точки $\check{z}' \in \text{supp } \check{U}'_R$, то

$$\left(\frac{|v|}{2\pi i} \right)^{l/2} (\check{U}_R | \check{U}'_R) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} [\text{Hess}(\varphi - \varphi')]^{-3r - \frac{1}{2}} P_r(\alpha_r, \alpha'_r) e^{v[\psi(\check{z}) - \psi'(\check{z}')]}, \quad (5.6)$$

где φ и φ' определены вблизи $R_x z$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \varphi_R(\check{R}_x^{-1} x \cap \check{V}), \quad \varphi'(x) = \varphi'_R(\check{R}_x^{-1} x \cap \check{V}'),$$

$$\text{Hess}(\varphi - \varphi') = \{\text{Hess}_x[\varphi(x) - \varphi'(x)]\}_{x=R_x z};$$

P_r есть билинейная функция от значений в точках $\check{z}$ и $\check{z}'$ частных производных порядка $\leq 2(r-s)$ от функций $\alpha_{R,s}$ и $\alpha'_{R,s}$ ($s \leq r$). Коэффициенты этой функции зависят от поведения V и V' в z ;

$$P_0(\alpha_R, \alpha'_R) = \alpha_{R,0}(\check{z}) \overline{\alpha'_{R,0}(\check{z}')}. \quad (5.7)$$

4) Инвариантность относительно $Sp_2(l)$. Пусть $S \in Sp_2(l)$. При условии, более сильном, чем (5.1), а именно

$$\check{U}_R \in \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{SR}, R), \quad \check{U}'_R \in \mathcal{F}_0(\check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R \cup \check{\Sigma}'_{SR}, R),$$

справедливо равенство

$$(\check{U}_R | \check{U}'_R) = (S\check{U}_R | S\check{U}'_R). \quad (5.8)$$

Доказательство 1), 2) и 3). u и u' имеют выражения типа

$$u = \sum_{j \in J} v_j(v, x) e^{v\varphi_j(x)}, \quad \text{где } v_j(v, x) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} v_{j,r}(x);$$

$$u' = \sum_{k \in K} v'_k(v, x) e^{v\varphi'_k(x)}, \quad \text{где } v'_k(v, x) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} v'_{k,r}(x).$$

Здесь J и K — конечные множества. В силу п. 1) теоремы 3

$$(u | u') = \int_{\check{X}} u(v, x) \overline{u'(v, x)} d^l x$$

зависит только от поведения пар $v_j e^{v\varphi_j}$, $v'_k e^{v\varphi'_k}$ в критических точках $\varphi_j - \varphi'_k$, т. е. в таких точках

$$x \in X, \text{ что } \varphi_{j,x} = \varphi'_{k,x}.$$

Другими словами, $(\check{U}_R | \check{U}'_R)$ зависит только от поведения $\check{U}_R$ и $\check{U}'_R$ в парах точек $(\check{z}, \check{z}') \in \check{V} \times \check{V}'$, таких, что

$$\check{R}\check{z} = \check{R}\check{z}' = (x, \varphi_{j,x}) = (x, \varphi'_{k,x}).$$

Это пары точек произведения $\check{V} \times \check{V}'$, проектирующихся в одну и ту же точку $z \in V \cap V'$. Отсюда следует 1), 2) и в силу (3.2) и (3.3) — 3).

Доказательство 4). Лемма 1.1 и п. 1) теоремы 4.1.

Инвариантность скалярного произведения $(\check{U}_R | \check{U}'_R)$ относительно $Sr_2(l)$, доказанная в п. 4) теоремы 5.1, ставит вопрос об инвариантных выражениях правых частей в формулах (5.4) и (5.6). В теоремах 5.2 и 5.3 будут даны такие выражения по mod $1/v$.

Обозначения. Пусть η и η' — регулярные меры > 0 на $\check{V}$ и $\check{V}'$. Положим по определению

$$\arg \eta = \arg \eta' = 0.$$

Предположим, что на $\check{V}$ и на $\check{V}'$ задана 2-ориентация: если $\check{z} \in \check{V}$, $x = \check{R}_x \check{z}$, то

$$\frac{d^l(\check{R}_x \check{z})}{\eta} = \frac{d^l x}{\eta} \text{ есть функция } \check{V} \rightarrow \mathbb{R},$$

равная нулю на $\check{\Sigma}_R$, аргумент которой определен в гл. I, § 3, следствии 3, а именно

$$\arg \frac{d^l(\check{R}_x \check{z})}{\eta} = \pi m_R(\check{z}) \pmod{4\pi}.$$

Определим $\beta_0: \check{V} \rightarrow \mathbb{C}$ равенством

$$\beta_0(\check{z}) = \left[\frac{d^l(\check{R}_x \check{z})}{\eta} \right]^{1/2} \alpha_{R,0}(\check{z}), \quad \text{где } \check{z} \in \check{V}. \quad (5.9)$$

Определение 5.2. В силу формул (4.6) и (4.8) теоремы 4.2 β_0 остается инвариантным, когда, не изменяя V , мы заменяем R на SR . β_0 называется лагранжевой амплитудой $\check{U}_R$. Эта амплитуда зависит, следовательно, от меры η на $\check{V}$ и 2-ориентации $\check{V}$. Подставляя в (5.4) выражение (5.9) для $\alpha_{R,0}$ и $\alpha'_{R,0}$, получаем следующий результат.

Теорема 5.2. Предположим, что $V = V'$ и, следовательно $\psi = \psi'$. Обозначим через β_0 и β'_0 лагранжевы амплитуды U_R и U'_R . Тогда

$$(\check{U}_R | \check{U}'_R) = \int_{z \in V} \sum_{\check{z}, \check{z}'} \beta_0(\check{z}) \beta'_0(\check{z}') e^{v[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')] \eta} \pmod{\frac{1}{v}}, \quad (5.10)$$

где $\check{z}$ и $\check{z}'$ — точки $\text{supp } \check{U}_R$ и $\text{supp } \check{U}'_R$, проектирующиеся в z .

Обозначения (продолжение). Обозначим ψ и ψ' лагранжевы фазы V и V' (гл. I, § 3, (1.7)). Сделаем предположение 3 теоремы 5.1. Пусть, далее, λ_4 и $\lambda'_4 \in \Lambda_4(Z)$ — касательные плоскости соответственно в точках $\check{z}$ и $\check{z}'$ к многообразиям $\check{V}$ и $\check{V}'$, λ и λ' — их естественная проекция в $\Lambda(Z)$. Пусть η_0 (и η'_0) — мера на λ (на λ'), инвариантная относительно переноса и равная $\eta(\eta')$ в точке $\check{z}$ ($\check{z}'$). Так как V и V' трансверсальны, то

$$Z = \lambda \oplus \lambda'; \quad \eta_0 \wedge \eta'_0 \text{ — мера в } Z. \quad (5.11)$$

В силу (5.1) и п. 1) теоремы 5.1 правая и левая стороны формулы (5.6) обращаются в нуль, если не сделать предположения

$$\check{z} \in \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, \quad \check{z}' \in \check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R, \quad (5.12)$$

т. е. $R\lambda$ и $R\lambda'$ трансверсальны к X^* .

Подставляя в (5.6) выражения (5.9) для $\alpha_{R,0}$ и $\alpha'_{R,0}$, мы получаем при условии (5.12)

$$\begin{aligned} \left(\frac{|v|}{2\pi i}\right)^{l/2} (\check{U}_R | \check{U}'_R) &= [\text{Hess}(\varphi - \varphi')]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\eta}{d^l(\check{R}_X \check{z})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\eta'}{d^l(\check{R}_X \check{z}')} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \beta_0(\check{z}) \overline{\beta'_0(\check{z}')} e^{v[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')] \eta} \pmod{\frac{1}{v}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Лемма 5.1 преобразует эту формулу в следующую теорему.

Теорема 5.3. Если V и V' — 2-ориентированные лагранжевы многообразия, трансверсальные и пересекающиеся в точке z — проекции единственной точки $\check{z} \in \text{supp } \check{U}_R$ и единственной точки $\check{z}' \in \text{supp } \check{U}'_R$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{|v|}{2\pi i}\right)^{l/2} (\check{U}_R | \check{U}'_R) &= \\ &= \left| \frac{\eta_0 \wedge \eta'_0}{d^{2l}z} \right|^{1/2} \beta_0(\check{z}) \overline{\beta'_0(\check{z}')} e^{v[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')] - \frac{\pi i}{2} m(\lambda'_4, \lambda_4)} \pmod{\frac{1}{v}}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где m — индекс Маслова, определенный mod 4 (гл. I, § 3, п. 3); $\eta_0 \wedge \eta'_0$ и $d^{2l}z$ меры в Z , определенные соответственно формулами (5.11) и (5.15).

Лемма 5.1. 1) Симплектическая структура Z определяет в Z меру, инвариантную относительно переносов и действия $Sp(l)$:

$$d^{2l}z = \frac{1}{l!} (dx \wedge dp)^l = (-1)^{l(l-1)/2} d^l x \wedge d^l p, \quad (5.15)$$

где $Rz = (x, p)$; $dx \wedge dp = \sum_{j=1}^l dx^j \wedge dp_j$; $\{x^j\}$ и $\{p_j\}$ — двойственные координаты в X и X^* .

2) При предположении (5.12) в обозначениях (5.9)

$$\left| \text{Hess}(\varphi - \varphi') \frac{d^l(\check{R}_x \check{z})}{\eta} \frac{d^l(\check{R}_x \check{z}')}{\eta'} \right| = \left| \frac{d^{2l}z}{\eta_0 \wedge \eta'_0} \right|, \quad (5.16)$$

$$\arg \left[\text{Hess}(\varphi - \varphi') \frac{d^l(\check{R}_x \check{z})}{\eta} \frac{d^l(\check{R}_x \check{z}')}{\eta'} \right] = \pi m(\lambda'_4, \lambda_4) \pmod{4\pi}. \quad (5.17)$$

Доказательство. 1) Значение $dp \wedge dx$ на паре векторов z, z' равно $[z, z']$.

2) Доказательство формулы (5.16). Так как $R\lambda$ и $R\lambda'$ лагранжевы и, согласно (5.12), трансверсальны к X^* , то их уравнения имеют вид

$$R\lambda: p = \Phi_x(x); \quad R\lambda': p = \Phi'_x(x), \quad (5.18)$$

где Φ и Φ' — две квадратичные формы $X \rightarrow \mathbb{R}$.

В силу трансверсальности λ и λ'

$$\text{Hess}(\Phi - \Phi') \neq 0.$$

Так как $Z = \lambda \oplus \lambda'$, всякое $z \in Z$ единственным образом раскладывается на сумму вектора из λ и вектора из λ' :

$$Rz = (x + x', \Phi_x(x) + \Phi'_{x'}(x')) \in Z(l),$$

где x и x' определяются однозначно. Отсюда в силу (5.15) имеем

$$\begin{aligned} d^{2l}z &= (-1)^{l(l-1)/2} d^l[x + x'] \wedge d^l[\Phi_x(x) + \Phi'_{x'}(x')] = \\ &= (-1)^{l(l-1)/2} d^l[x + x'] \wedge d^l[\Phi_x(x) - \Phi'_{x'}(x)] = \\ &= (-1)^{l(l+1)/2} \text{Hess}(\Phi - \Phi') d^l x \wedge d^l x' = \\ &= (-1)^{l(l-1)/2} \text{Hess}(\Phi - \Phi') \frac{d^l(R_x \xi)}{\eta_0} \wedge \frac{d^l(R_x \xi')}{\eta'_0} \eta_0 \wedge \eta'_0, \end{aligned}$$

где $\xi \in \lambda$, $\xi' \in \lambda'$.

Отсюда непосредственно получается формула (5.16).

Доказательство (5.17). По определению [гл. I, § 3, следствие 3, (3.2) и (3.3)]

$$\arg \frac{d^l(\check{R}_X \check{z})}{\eta} = \pi m_R(\check{z}) = \pi m(X_4^*, R\lambda_4) \pmod{4}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \pi m(\lambda_4', \lambda_4) - \arg \frac{d^l(\check{R}_X \check{z})}{\eta} + \arg \frac{d^l(\check{R}_X \check{z}')}{\eta'} &= \\ = \pi m(\lambda_4', \lambda_4) - \pi m(X_4^*, R\lambda_4) + \pi m(X_4^*, R\lambda_4') &= \\ = \pi \text{Inert}(X^*, R\lambda', R\lambda) \pmod{4\pi} \end{aligned}$$

(см. гл. I, § 2, (8.2)). Чтобы доказать формулу (5.17), достаточно, следовательно, в силу определения $\arg \text{Hess}$ [гл. I, § 1, (2.1)] доказать, что

$$\text{Inert}(\Phi - \Phi') = \text{Inert}(X^*, R\lambda', R\lambda). \quad (5.19)$$

Доказательство (5.19). Запишем уравнения $R\lambda$, $R\lambda'$ и X^*

$$R\lambda: p = \Phi_x(x); \quad R\lambda': p' = \Phi_{x'}(x'); \quad X^*: x'' = 0.$$

Для определения Inert нужны точки (гл. I, § 2, п. 4)

$$z \in R\lambda, \quad z' \in R\lambda', \quad z'' \in X^*, \quad \text{такие, что } z + z' + z'' = 0.$$

Мы имеем

$$z = (x, p); \quad z' = (x', p'); \quad z'' = (x'', p''),$$

откуда

$$x + x' = 0; \quad x'' = 0; \quad p + p' + p'' = 0,$$

$$\begin{aligned} [z'', z] = \langle p'', x \rangle &= -\langle p, x \rangle - \langle p', x \rangle = \\ &= -\langle \Phi_x(x), x \rangle + \langle \Phi_{x'}(x), x \rangle = 2\Phi'(x) - 2\Phi(x) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\text{Inert}(R\lambda, R\lambda', X^*) = \text{Inert}(\Phi' - \Phi),$$

откуда следуют (5.19) в силу гл. I, § 2, (4.4) и определения 2.3 гл. I, § 1 индекса инерции формы.

6. Формальные дифференциальные операторы

Определение 6.1. Пусть Ω — открытое множество в Z . Обозначим $\mathcal{F}^0(\Omega)$ множество формальных функций с нулевой фазой

$$a^0 = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} \alpha_r: \Omega \rightarrow \mathcal{F}^0, \quad (6.1)$$

таких, что $\alpha_r: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — бесконечно дифференцируемые функции. Зададим в векторном пространстве $\mathcal{F}^0(\Omega)$ топологию, определенную системой окрестностей нуля $\mathcal{V}(K, p, r, \varepsilon)$, где K — компактная часть Ω ; $p, r \in \mathbb{N}$, и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^0$. $a^0 \in \mathcal{V}(K, p, r, \varepsilon)$ означает, что на K производные порядка $\leq p$ от α_s , $s \leq r$ по модулю $< \varepsilon$.

Мы будем говорить, что a^0 многочлен, если

$$(v, z) \mapsto a^0(v, z)$$

есть многочлен относительно $\frac{1}{v}$ и $2l$ координат точки z . По теореме Вейерштрасса множество многочленов $\mathcal{F}^0(Z)$ плотно в $\mathcal{F}^0(\Omega)$.

$\mathcal{F}^0(\Omega(l))$ определяется аналогично с заменой Ω на открытое множество $\Omega(l) \in Z(l) = X \oplus X^*$.

Всякий 1-репер R в Z (и, следовательно, всякий 2-репер R) индуцирует изоморфизм

$$\mathcal{F}^0(\Omega) \ni a^0 \mapsto a_R^0 \in \mathcal{F}^0(\Omega(l)), \text{ где } \Omega(l) = R\Omega,$$

определенный формулой

$$\forall v, z \quad a^0(v, z) = a_R^0(v, Rz). \quad (6.2)$$

Формулы (3.4) гл. I, § 1

$$\left. \begin{aligned} a_R^+(v, x, p) &= e^{\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} a_R^0(v, x, p), \\ a_R^-(v, p, x) &= e^{-\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} a_R^0(v, x, p) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

определяют два взаимно обратных автоморфизма

$$a_R^0 \mapsto a_R^+; \quad a_R^0 \mapsto a_R^-.$$

Определение 6.2 формальных дифференциальных операторов основано на следующей лемме.

Лемма 6.1. Пусть

$$u = \alpha e^{v\varphi} \in \mathcal{F}(X), \quad \text{где} \quad \alpha = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} \alpha_r. \quad (6.4)$$

В каждой критической точке фазы φ справедливо равенство

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^h u(v, x) = 0 \left(\frac{1}{v^{1/2}} \right).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\alpha = \alpha_0$. Тогда в критической точке

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^h u = \frac{1}{v^{1/2}} P_h e^{v\varphi} \quad (h — мультииндекс),$$

где P_h есть многочлен относительно производных α порядков от 0 до $|h|$ и производных $v\varphi$ порядков от 2 до $|h|$, так как $\varphi_x = 0$. Каждое слагаемое P_h есть произведение производных, сумма порядков которых равна $|h|$. Следовательно, степень v в таком слагаемом $\leq |h|/2$, что и доказывает лемму.

Определение 6.2. Обозначим

$$\Theta(y, x) = \varphi(x) - \varphi(y) - \langle \varphi_y(y), x - y \rangle \quad (6.5)$$

остаточный член формулы Тейлора для фазы φ , входящей в формулу (6.4).

Сопоставим элементу $a^0 \in \mathcal{F}^0(\Omega)$ и реперу R локальный эндоморфизм $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}_0(X)$, который называется *формальным дифференциальным оператором* a_R и определяется двумя эквивалентными формулами:

$$\begin{aligned} (a_R u)(v, y) &= \\ &= \sum_h \frac{1}{h!} \left\{ \frac{\partial^{|h|} a_R^+}{\partial p^h} (v, x, p) \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^h [\alpha(v, x) e^{v\Theta(y, x)}] \right\}_{\substack{x=y \\ p=\varphi_y(y)}} e^{v\varphi(y)} = \\ &= \sum_h \frac{1}{h!} \left\{ \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^h \left[\frac{\partial^{|h|} a_R^-}{\partial p^h} (v, p, x) \alpha(v, x) e^{v\Theta(y, x)} \right] \right\}_{\substack{x=y \\ p=\varphi_y(y)}} e^{v\varphi(y)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

В силу леммы 6.1 каждое из этих выражений имеет смысл, когда $(y, \varphi_y(y)) \in \Omega(l)$.

Мы будем говорить, что оператор a_R *определен* на $\Omega(l) = R\Omega$.

Доказательство эквивалентности двух выражений для a_R (ср. гл. I, § 1, доказательство леммы 3.1):

$$\begin{aligned} &\sum_h \frac{1}{h!} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^h \left[\frac{\partial^{|h|} a_R^-}{\partial p^h} (v, p, x) v(v, x) \right] = \\ &= \sum_{j, k} \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{|2j+k|} a_R^-}{\partial p^{j+k} (v \partial x)^j} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^k v(v, x) = \\ &= \sum_k \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} a_R^+}{\partial p^k} (v, x, p) \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right)^k v(v, x), \end{aligned}$$

так как в силу (6.3)

$$\sum_j \frac{1}{j!} \frac{\partial^{|2j|} a_R^-}{\partial p^j (v \partial x)^j} = e^{\frac{1}{v} \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \rangle} a_R^- (v, p, x) = a_R^+ (v, x, p).$$

Для обоснования определения 6.2 покажем, что, в случае когда a^0 — многочлен, оно дает классический дифференциальный оператор с коэффициентами, полиномиально зависящими от $\left(\frac{1}{v}, x\right)$.

В этом случае формула (6.6) означает

$$(a_R u)(v, x) = \left\{ a_R^+ \left(v, x, p + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) [u(v, x) e^{-v \langle p, x-y \rangle}] \right\}_{\substack{y=x \\ p=\varphi_x}}.$$

Но

$$\begin{aligned} a_R^+ \left(v, x, p + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) [u(v, x) e^{-v \langle p, x-y \rangle}] &= \\ &= e^{-v \langle p, x-y \rangle} a_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) u(v, x). \end{aligned}$$

Мы имеем, следовательно, вспоминая определение, данное в п. 1, $a^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) = a^- \left(v, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}, x \right)$:

$$(a_R u)(v, x) = a_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) u(v, x) = a_R^- \left(v, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}, x \right) u(v, x).$$

Обозначения. Обозначим в общем случае также

$$(a_R u)(v, x) = a_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) u(v, x) = a_R^- \left(v, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}, x \right) u(v, x).$$

Определение 6.3. Пусть $V \subset \Omega$, $a^0 \in \mathcal{F}^0(\Omega)$. Обозначим через a_R единственный локальный эндоморфизм $\mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$, такой, что

$$a_R \Pi_R = \Pi_R a_R. \quad (6.7)$$

Локальный эндоморфизм a_R продолжается до эндоморфизма $\mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$, свойства которого дает

Теорема 6. 1) Формальный дифференциальный оператор a_R локален (в смысле п. 1, теоремы 4.1). Следовательно,

$$\text{supp}(a_R U_R) \subset \text{supp} U_R \cap \text{supp}(a^0).$$

2) Отображение

$$\mathcal{F}^0(\Omega) \times \mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) \ni (a_R, U_R) \mapsto a_R U_R \in \mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) \quad (6.8)$$

непрерывно.

3) Всякий элемент $S \in Sp_2(l)$ преобразует a_R в оператор

$$a_{SR} = S a_R S^{-1},$$

определенный формулой

$$a_{SR}(S \check{U}_R) = S(a_R \check{U}_R) \quad \text{для всех } \check{U}_R \in \mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{SR}, R).$$

a_R и преобразованный оператор a_{SR} ассоциированы с одной и той же функцией a^0 , которая удовлетворяет условию

$$\forall v, z \quad a^0(v, z) = a_R^0(v, Rz) = a_{SR}^0(v, SRz). \quad (6.9)$$

4) Для того чтобы формальные дифференциальные операторы a_R и b_R были сопряжены, т. е. для того, чтобы

$$\forall \check{U}_R, \check{U}'_R (a_R \check{U}_R, \check{U}'_R) = (\check{U}_R, b_R \check{U}'_R),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall v, z \quad b^0(v, z) = \overline{a^0(v, z)}.$$

5) Если a_R и b_R — два дифференциальных оператора, ассоциированных с элементами a^0 и $b^0 \in \mathcal{F}^0(Z)$, то их композиция $c_R = a_R \circ b_R$ ассоциирована с элементом $c^0 \in \mathcal{F}^0(Z)$, определенным формулой

$$c^0(v, z) = \left\{ e^{-\frac{1}{2v} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'} \right]} [a^0(v, z) b^0(v, z')] \right\}_{z=z'}, \quad (6.10)$$

где

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'} \right] = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p'} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle \quad (6.11)$$

для $Rz = (x, p)$, $Rz' = (x', p)$, и, очевидно, $\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'} \right]$ не зависит от R .

Замечание 6. $c^0 = a^0 b^0 + \frac{1}{2v} (a^0 | b^0) \pmod{\frac{1}{v^2}}$, где $(a^0 | b^0)$ есть скобка Пуассона; см. гл. II, § 3 (3.14).

Доказательство. 1) Определение a_R .

2) Определение a_R и топологии в $\mathcal{F}^0(\Omega)$

п. 6) и $\mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$ (п. 2).

3), 4) и 5). В гл. I, § 1 (теорема 3.1, теорема 3.2 и лемма 3.2) эти свойства доказаны в частном случае, когда a^0 — многочлен.

Из этого частного случая следует общий, так как отображение (6.8) непрерывно и многочлены всюду плотны в $\mathcal{F}^0(\Omega)$.

Следствия из этих теорем 3.1 (о сопряженном операторе) и 3.2 (о самосопряженном операторе), очевидно, также применимы к формальным дифференциальным операторам.

7. Формальные обобщенные функции

В п. 1 и п. 2 этого § 1 нельзя заменить пространство $\mathcal{P}(X)$ пространством $\mathcal{P}'(X)$, доказательство теоремы 2.2 становится невозможным, потому что $\mathcal{P}'(X)$ в отличие от $\mathcal{P}(X)$ не имеет счетной фундаментальной системы окрестностей нуля.

Определение 7.1. Алгебра $\mathcal{D}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$ — это алгебра бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем

$$f: \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \rightarrow \mathbb{C}.$$

В качестве локальных координат на $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$ используется $x = \check{R}_x \check{z}$.

Если задан компакт $\check{K} \subset \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$ и для каждого мультииндекса r число $b_r > 0$, то обозначим

$$B(\check{K}, \{b_r\}) = \left\{ f \in \mathcal{D}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) \mid \text{supp } f \subset \check{K}, \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^r f \right| = b_r \right\}.$$

Подмножества этих множеств $B(\check{K}, \{b_r\})$ образуют по определению ограниченные множества в $\mathcal{D}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$.

Определение 7.2. Векторное пространство $\mathcal{D}'(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$ — это пространство линейных функционалов на $\mathcal{D}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$, ограниченных на каждом ограниченном множестве из $\mathcal{D}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$:

$$f': \mathcal{D}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Эти f' есть обобщенные функции. Для них определен носитель и производные любого порядка по $x = \check{R}_x \check{z}$, которые также являются обобщенными функциями. Можно считать, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}'$ — векторное пространство над алгеброй $\mathcal{D}$.

Значение $f' \in \mathcal{D}'$ на $f \in \mathcal{D}$ обозначается

$$\int_{\check{V}} f'(\check{z}) f(\check{z}) d^l x, \quad \text{где } x = \check{R}_x \check{z};$$

$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}$ определено, следовательно, на $\mathcal{D}'$ требование самосопряженности:

$$\int_{\check{V}} \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} f'(\check{z}) \right] \overline{f(\check{z})} d^l x = \int_{\check{V}} f'(\check{z}) \overline{\left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} f(\check{z}) \right]} d^l x.$$

Для каждого ограниченного множества $B \subset \mathcal{D}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$ обозначим

$$\|f'\|_B = \sup_{f \in B} \left| \int_{\check{V}} f'(\check{z}) f(\check{z}) d^l x \right| < \infty.$$

Топология в $\mathcal{D}'(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$ определяется фундаментальной системой окрестностей нуля, каждая из которых зависит от ограниченного множества $B \subset \mathcal{D}$ и числа $\varepsilon > 0$, а именно

$$\mathcal{U}'(B, \varepsilon) = \{f' \mid \|f'\|_B \leq \varepsilon\}.$$

Обобщенные функции f' с компактным носителем образуют подпространство $\mathcal{D}'_0 \subset \mathcal{D}'$, которое, очевидно, плотно в $\mathcal{D}'$.

Можно доказать (как это сделал Л. Шварц [13], гл. VI; § 4, теорема IV, теорема XI и комментарий к ней) следующее утверждение: $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}'_0$. Следовательно,

$$\mathcal{D}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) \text{ плотно в } \mathcal{D}'(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R).$$

Определение 7.3. Формальная обобщенная функция $\check{U}'_R$ на $\check{V}$ определяется

- i. 2-репером R в Z ;
- ii. формальным рядом

$$\check{U}'_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha'_r}{v^r} e^{v\varphi_R},$$

где φ_R — фаза RV , $\alpha'_r \in \mathcal{D}'(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$:

$$\text{supp } \check{U}'_R = \overline{\bigcup_r \text{supp } \alpha'_r} \subset \check{V}.$$

$\mathcal{F}'(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$ — векторное пространство формальных обобщенных функций $\check{U}'_R$ на $\check{V}$. Топология этого пространства определяется фундаментальной системой окрестностей нуля, каждая из которых зависит от ограниченного множества $B \subset \subset \mathcal{D}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$ и двух чисел $\varepsilon > 0$, $N > 0$. Определение этой окрестности таково:

$$\mathcal{V}'(B, \varepsilon, N) = \{U'_R \mid |\alpha'_r|_B < \varepsilon \text{ для } r \leq N\}.$$

Очевидно, $\mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$ плотно в $\mathcal{F}'(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$.

Изоморфизм (4.9), определенный с помощью $S = RR'^{-1} \in \in Sp_2(l)$, продолжается, следовательно, в силу (4.6) до непрерывного и локального изоморфизма

$$S: \mathcal{F}'(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R') \rightarrow \mathcal{F}'(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cap \check{\Sigma}_{R'}, R).$$

Формальный дифференциальный оператор a_R также, согласно (6.6), продолжается до непрерывного локального эндоморфизма

$$a_R: \mathcal{F}'(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) \rightarrow \mathcal{F}'(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R);$$

для каждого справедлива теорема 6.

Скалярное произведение $\check{U}_R$ и $\check{U}'_R$ — функции и обобщенной функции, заданных на одном и том же многообразии $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$, определяется формулой (5.4) теоремы 5.1, когда $\text{supp } \check{U}_R \cap \text{supp } \check{U}'_R$ компактно. Это скалярное произведение инвариантно относительно действия $Sp_2(l)$ (теорема 5.1, 4)). Для него справедлива теорема 5.2.

§ 2. ЛАГРАНЖЕВ АНАЛИЗ

0. Резюме

На основании свойств формальных функций и формальных дифференциальных операторов, установленных в § 1, во втором параграфе будут определены и изучены *лагранжевы операторы, лагранжевы функции и обобщенные функции и их скалярные произведения*. Эти понятия образуют структуру, называемую *лагранжев анализ*.

В п. 1 определяются *лагранжевы операторы* и изучаются обратные к ним операторы. В п. 2 определяются *лагранжевы функции на накрытии $\tilde{V}$ лагранжева многообразия V* . Их скалярное произведение $(\cdot | \cdot)$ определено, когда их носители компактны. В п. 3 определяются вслед за этим *лагранжевы функции на V* . Их скалярное произведение определено, когда компактно пересечение их носителей. В этом п. 3 требуется задание числа $\nu_0 \in i[0, \infty[$. Здесь применяется «ограничение» на значение ν_0 формальных рядов, определяющих выражения U_R формальной функции U .

Процесс определения лагранжевых функций на V имеет теоретическое оправдание, которое состоит в возможности определить их скалярное произведение $(\cdot | \cdot)$, а также прагматическое оправдание, а именно: это *процесс некоторых «приближенных вычислений»*. Например, в квантовой физике постоянная Планка $\hbar$ рассматривается как бесконечно малая (роль переменной $\nu \in i[1, \infty[$ в квантовой физике играет $\frac{2\pi i}{\hbar}$) и не сравнивается порядок численных значений рассматриваемых величин, когда $\hbar$ принимает свое истинное физическое значение: это значение придается $\hbar$ только после завершения вычислений, предполагающих $\hbar$ бесконечно малой.

Другой, более ранний пример дает небесная механика. А. Пуанкаре показал, как посредством такого процесса приближенного вычисления можно предсказать с большой точностью небесные феномены с помощью расходящихся рядов, от которых в конце вычислений остаются только первые члены.

В. П. Маслов хочет с помощью этого процесса получить «асимптотики», т. е. осуществить приближенные вычисления.

В гл. III этот процесс будет применен к случаю, когда он, безусловно, не является приближенным вычислением и будут получены численные результаты, которые согласуются с экспериментом. Объяснение этого является «задачей, которая ставит себя, а не задачей, которую ставят себе» в том смысле, как это имеет в виду А. Пуанкаре.

1. Лагранжевы операторы

Пусть Z — симплектическое пространство и $\Omega \subset Z$ — открытое множество.

Определение 1.1. Пусть $a^0 \in \mathcal{F}^0(\Omega)$ (гл. II, § 1, определение 6.1). Пусть, далее,

$$a_R = a_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) = a_R^- \left(v, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x}, x \right)$$

— формальный дифференциальный оператор, ассоциированный с a^0 и 1-репером R (гл. II, § 1, определение 6.2). *Лагранжев оператор*, ассоциированный с a^0 , есть множество $\{a_R\}$ этих формальных дифференциальных операторов a_R (a^0 задано; R произвольно). a_R называется *выражением* для a в репере R .

Теорема 2.3 дает обоснование этой терминологии. Мы будем говорить, что a *определен* на Ω . Положим

$$\text{supp}(a) = \text{supp } a^0.$$

Если $\forall v, z \ a^0(v, z) = c \in \mathbb{C}$, то мы будем обозначать

$$a = c.$$

Формула (2.9) (п. 2 § 2) дает обоснование для нижеследующего определения.

Определение 1.2. Два лагранжевых оператора a и b , ассоциированные с a^0 и $b^0 \in \mathcal{F}^0(\Omega)$, *сопряжены*, когда

$$\forall v, z \quad b^0(v, z) = a^0(v, z),$$

т. е. (§ 1, теорема 6.1, 4)) когда $\forall R \ a_R$ и b_R сопряжены.

Обозначение. Оператор, сопряженный к a , будет обозначаться a^* .

Формула (1.2) и вытекающая из нее формула (2.2) позволяют дать

Определение 1.3. *Композиция* $a^0 \circ b^0$, где $a^0, b^0 \in \mathcal{F}^0(\Omega)$, есть по определению

$$(a^0 \circ b^0)(v, z) = \left\{ e^{-\frac{1}{2v} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'} \right]} a^0(v, z) \cdot b^0(v, z') \right\}_{z=z'}, \quad (1.1)$$

где $\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'} \right]$ определено в § 1 (6.11).

Композиция $a \circ b$ соответствующих лагранжевых операторов есть оператор, ассоциированный с $a^0 \circ b^0$.

В силу п. 5) теоремы 6 § 1

$$(a \circ b)_R = a_R \circ b_R. \quad (1.2)$$

Так как композиция a_R ассоциативна, композиция a^0 и a также ассоциативна. Это легко проверить непосредственно, заметив, что из (1.1) следует

$$\begin{aligned} (a^0 \circ b^0 \circ c^0)(v, z) &= \\ &= \left\{ e^{-\frac{1}{2v} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'} \right] - \frac{1}{2v} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z''} \right] - \frac{1}{2v} \left[\frac{\partial}{\partial z'}, \frac{\partial}{\partial z''} \right]} \times \right. \\ &\quad \left. \times a^0(v, z) b^0(v, z') c^0(v, z'') \right\}_{z=z'=z''}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Эта формула легко распространяется на композицию произвольного числа элементов $\mathcal{F}^0(\Omega)$.

Очевидно, что

$$\text{supp}(a \circ b) \subset \text{supp}(a) \cap \text{supp}(b), \quad (1.4)$$

$$(a^0 \circ b^0)(v, z) = a^0(v, z) \cdot b^0(v, z) \pmod{\frac{1}{v}}. \quad (1.5)$$

Правая часть последнего равенства есть произведение значений a^0 и b^0 в $\mathcal{F}^0$;

$$(a^0 \circ b^0)(v, z) = \left\{ \text{ch} \frac{1}{2v} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'} \right] a^0(v, z) \cdot b^0(v, z') \right\}_{z=z'}. \quad (1.6)$$

Теорема 1.1 (обращение лагранжева оператора). Для того чтобы в алгебре лагранжевых операторов, определенных на Ω , оператор a имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall z \in \Omega \quad a^0(v, z) \neq 0 \pmod{\frac{1}{v}}. \quad (1.7)$$

Напомним, что по определению $a^0(v, z)$ есть формальный ряд

$$a^0(v, z) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} a_r(z). \quad (1.8)$$

Условие (1.7) означает, что

$$\forall z \in \Omega \quad a_0(z) \neq 0. \quad (1.7)^{\text{bis}}$$

Доказательство. В силу (1.5) эквивалентные условия (1.7) или $(1.7)^{\text{bis}}$ являются необходимыми. Обратно, если эти условия выполнены, то правый обратный a' к оператору a есть оператор, ассоциированный с формальным рядом

$$a'^0(v, \cdot) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} a'_r(\cdot),$$

где

$$\left\{ e^{-\frac{1}{2v}} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'} \right] a^0(v, z) a'^0(v, z') \right\}_{z'=z} = 1, \quad (1.9)$$

т. е.

$$a_0(z) a'_0(z) = 1, \quad (1.10)_0$$

$$a_0(z) a'_r(z) = c_r(z), \quad (1.10)_r$$

где $c_r(z)$ есть линейная комбинация

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^s a_t(z) \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{s'} a'_{t'}(z) \right],$$

таких, что $0 \leq |s| = |s'| = r - t - t', t' < r$.

Эти условия определяют a' .

Следовательно, a имеет правый обратный и аналогично левый обратный, которые совпадают, так как композиция элементов $\mathcal{F}^0(\Omega)$ ассоциативна. Теорема доказана.

При определении скалярных произведений (п. 3 и 4) будет использовано

Определение 1.4. Разложением единицы называется такое множество лагранжевых операторов $\{a_j\}$, определенных на Z , что

$$\left. \begin{aligned} \bigcup_j \text{supp } a_j &= Z \quad \text{есть локально конечное покрытие } Z, \\ \sum_j a_j &= 1 \quad (\text{единичный оператор}). \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Это разложение называется подчиненным покрытием $\bigcup_k \Omega_k = X$, если $\forall_j \text{supp } a_j$ принадлежит хотя бы одному Ω_k .

Теорема 1.2 (о разложении единицы). 1) Для всякого открытого покрытия X существует подчиненное ему разложение единицы. 2) Можно выбрать это разложение так, чтобы его элементы были самосопряженными операторами a_j . 3) Более точно, можно выбрать a_j , имеющие вид

$$a_j = b_j^* \circ b_j, \quad \text{где} \quad \text{supp } b_j = \text{supp } a_j$$

(b_j — лагранжев оператор, b_j^* — сопряженный к нему).

Доказательство. 1) и 2) Достаточно доказать теорему, когда операторы a_j заменены бесконечно дифференцируемыми действительными функциями

$$a_j^0: Z \rightarrow \mathbb{R},$$

не зависящими от v . Но в этом случае теорема является классической.

3) Если задано покрытие $\bigcup_k \Omega_k = X$, можно выбрать функции из C^∞ :

$$b_j^0: Z \rightarrow \mathbb{R},$$

такие, что

$$\sum_j [b_j^0(z)]^2 = 1, \quad \text{supp } b_j^0 \subset \Omega_k \text{ по крайней мере для одного } k,$$

откуда в силу (1.6)

$$\sum_j b_j^0 \circ b_j^0 = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^{2r}} \beta_r,$$

где $\beta_r: Z \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta_0 = 1$.

Определим

$$c^0 = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^{2r}} \gamma_r, \quad \text{где } \gamma_r: Z \rightarrow \mathbb{R}, \gamma_0 = 1,$$

так, чтобы

$$c^0 \circ c^0 = \sum_j b_j^0 \circ b_j^0,$$

т. е. чтобы

$$\left\{ \text{ch } \frac{1}{2v} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'} \right] \sum_{t, t'} \frac{1}{v^{2(t+t')}} \gamma_t(z) \gamma_{t'}(z') \right\}_{z'=z} = \sum_r \frac{1}{v^{2r}} \beta_r.$$

Это условие определяет γ_r как функцию от β_r и произведений $\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^s \gamma_t(z) \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{s'} \gamma_{t'}(z) \right]$, таких, что

$$0 \leq |s| = |s'| = 2(r - t - t'), \quad 0 < t < r.$$

Следовательно, c^0 существует и по теореме 1.1 имеет обратный. Следовательно, $b_j = b_j^*$, $c = c^*$,

$$\sum_j b_j \circ b_j = c \circ c.$$

Откуда следует, что $a_j = (b_j \circ c^{-1})^* \circ (b_j \circ c^{-1})$ образуют разложение единицы, подчиненное данному покрытию.

2. Лангражевы функции на $\check{V}$

Пусть Z — симплектическое пространство, снабженное 2-симплектической геометрией; V — лагранжево многообразие, $\check{V}$ — его универсальное накрытие.

Теорема 4.1 § 1 дает основание для следующего определения:

Определение 2.1. Лагранжева функция $\check{U}$ на $\check{V}$ задается формальной функцией $\check{U}_R$ на $\check{V} \setminus \Sigma_R$ для каждого репера R ,

причем эти функции удовлетворяют условию

$$\forall R, R' \text{ на } \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} \quad \check{U}_R = RR'^{-1} \check{U}_{R'}.$$

$\check{U}_R$ называется выражением $\check{U}$ в репере R .

$\text{supp } \check{U}$ есть часть $\check{V}$, определенная условием

$$\forall R \text{ sup } \check{U}_R = (\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R) \cap \text{supp } \check{U}.$$

Это определение имеет смысл, потому что $S = RR'^{-1}$ — точечное преобразование.

Множество всех лагранжевых функций и множество лагранжевых функций с компактным носителем являются векторными пространствами над $\mathcal{F}$, которые мы будем обозначать $\mathcal{F}(\check{V})$ и $\mathcal{F}_0(V)$. Эти пространства бесконечномерны, как показывает

Теорема 2.1 (теорема существования). *Всякое $\check{U}_{R'} \in \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'}, R')$ является выражением в R' лагранжевой функции $\check{U}$ на $\check{V}$ с компактным носителем.*

Доказательство. Пусть R — какой-нибудь 2-репер. Обозначим $S = RR'^{-1} \in Sp_2(l)$; $\check{U}_R = S\check{U}_{R'}$, где $\check{U}_R$ — формальная функция, определенная на $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}$, тождественно равная нулю в окрестности $\check{\Sigma}_{R'}$; продолжим ее определение, полагая

$$\check{U}_R = 0 \text{ на } \check{\Sigma}_{R'} \setminus \check{\Sigma}_R \cap \check{\Sigma}_{R'};$$

$\check{U}_R$ становится тогда формальной функцией, определенной на $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$; $\check{U} = \{\check{U}_R\}$ есть, очевидно, лагранжева функция

$$\text{supp } \check{U} = \text{supp } \check{U}_{R'}.$$

Из теоремы 4.2 § 1 следует

Теорема 2.2 (структура лагранжевых функций). *Обозначим: ψ — лагранжева фаза $\check{V}$; η — регулярная мера > 0 на V ; $x = \check{R}_x \check{z} \in X$, где $\check{z} \in \check{V}$; положим $[\eta]^{1/2} > 0$; выберем на $\check{V}$ 2-ориентацию; вспомним, что $[d^l x]^{1/2}$ определено с помощью индекса Маслова в следствии 3 гл. I, § 3.*

На $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$ мы имеем

$$\check{U}_R(v, \check{z}) = \sum_{r \in N} \left[\frac{\eta}{d^l x} \right]^{3r+1/2} \frac{1}{v^r} \beta_{Rr}(\check{z}) e^{v\varphi_R(\check{z})}, \quad (2.1)$$

где β_{Rr} — бесконечно дифференцируемые функции: $\check{V} \rightarrow \mathbb{C}$. $\beta_R, 0$ не зависит от R , будет обозначаться β_0 и называется лагранжевой амплитудой.

Замечание 2.1. Показатель $3r + \frac{1}{2}$ в формуле (2.1) не может быть уменьшен: ср. гл. III, § 3, теорема 4.2, где многочлен f_r имеет степень $3r$ и рациональная функция g_r полюса порядка $3r$.

Теорема 6 § 1 позволяет дать

Определение 2.2. Пусть Ω — открытое множество в Z ; пусть a — лагранжев оператор на Ω и $\check{U}$ — лагранжева функция на $\check{V}$; R и R' — 2-реперы; $S = RR'^{-1} \in Sp_2(l)$; мы имеем

$$a_R \check{U}_R = S(a_{R'} \check{U}_{R'}).$$

Формальные функции $a_R \check{U}_R$ задают лагранжеву функцию, которая будет обозначаться $a\check{U}$.

Имеет место

Теорема 2.3. Алгебра лагранжевых операторов a, b , определенных на $\Omega \supset V$, действует на векторном пространстве $\mathcal{F}(\check{V})$ и $\mathcal{F}_0(\check{V})$ лагранжевых функций $\check{U}$ (с компактным носителем), определенных на $\check{V}$

$$a(b\check{U}) = (a \cdot b) \check{U}, \quad (2.2)$$

$$\text{supp}(a\check{U}) = \text{supp } \check{U} \cap \check{\Pi}^{-1} \text{supp } a, \quad (2.3)$$

где $\check{\Pi}$ — проекция $\check{V}$ на $V \subset Z$.

Определение 2.3. Скалярное произведение $(\cdot | \cdot)$. Пусть $\check{U} \in \mathcal{F}_0(\check{V})$ и $\check{U}' \in \mathcal{F}_0(\check{V}')$. Предположим сначала, что удовлетворяется следующее условие:

Существует 2-репер R , такой, что

$$\text{supp } \check{U} \cap \check{\Sigma}_R = \emptyset; \quad \text{supp } \check{U}'_R \cap \check{\Sigma}' = \emptyset. \quad (2.4)$$

Эти условия означают, что

$$\check{U}_R \in \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R); \quad \check{U}'_R \in \mathcal{F}_0(\check{V}' \cap \check{\Sigma}'_R, R).$$

Положим тогда по определению

$$(\check{U} | \check{U}') = (\check{U}_R | \check{U}'_R) \in \mathcal{C} \text{ для всех } R, \text{ удовлетворяющих (2.4).} \quad (2.5)$$

Правая часть формулы (2.5) есть асимптотический класс согласно определению 5 гл. II, § 1. Он не зависит от R в силу п. 4) теоремы 5.1. Пусть $\check{U}$ и $\check{U}'$ не удовлетворяют больше условиям (2.4). Обозначим

$$\sum_i a_i = 1, \quad \sum_i a'_i = 1 \quad (2.6)$$

два разложения единицы (определение 1.4), достаточно мелких (теорема 1.2) для того, чтобы всякой паре (j, j') соответствовал 2-репер $R_{j, j'}$, удовлетворяющий условию

$$\text{supp } a_j \cap \Sigma_{R_{j, j'}} = \emptyset; \quad \text{supp } a'_{j'} \cap \Sigma_{R_{j, j'}} = \emptyset. \quad (2.7)$$

Тогда $\mathbf{V}_{j, j'}$ определено $(a_j \check{\mid} a'_{j'} \check{\mid} \check{U} \check{\mid} \check{U}')$.

Положим

$$(\check{U} \check{\mid} \check{U}') = \sum_{j, j'} (a_j \check{U} \check{\mid} a'_{j'} \check{U}') \in \mathcal{C}. \quad (2.8)$$

Правая часть формулы (2.8) не зависит от выбора разложений единицы (2.6). Действительно, если $\sum_k b_k = 1$, $\sum_{k'} b'_{k'} = 1$ — другая пара разложений, удовлетворяющая условиям (2.7), то

$$\begin{aligned} \sum_{j, j'} (a_j \check{U} \check{\mid} a'_{j'} \check{U}') &= \sum_{j, j'} (a_j \check{U}_{R_{j, j'}} \check{\mid} a'_{j'} \check{U}'_{R_{j, j'}}) = \\ &= \sum_{j, j', k, k'} (a_j \circ b_k \check{U}_{R_{j, j'}} \check{\mid} a'_{j'} \cdot b'_{k'} \check{U}'_{R_{j, j'}}) = \sum_{k, k'} (b_k \check{U} \check{\mid} b'_{k'} \check{U}'), \end{aligned}$$

так как реперы $R_{j, j'}$ могут быть заменены реперами $R_{kk'}$.

Теорема 2.4 (скалярное произведение).

1) Скалярное произведение $(\cdot \check{\mid} \cdot)$ есть билинейная функция над $\mathcal{F}^0$ со значениями в $\mathcal{C}$ (классах асимптотической эквивалентности) от пары $\check{U}$ и $\check{U}'$ лагранжевых функций на $\check{V}$ и $\check{V}'$ с компактным носителем, $(\check{U} \check{\mid} \check{U}')$ и $(\check{U}' \check{\mid} \check{U})$ комплексно-сопряжены и зависят только от значений $\check{U}$ и $\check{U}'$ в парах точек $\check{V}$ и $\check{V}'$, проектирующихся в одну и ту же точку $V \cap V'$.

Если $V \cap V' = \emptyset$, то $(\check{U} \check{\mid} \check{U}') = 0$.

Если лагранжевы операторы a и a^* сопряжены, то

$$(a \check{U} \check{\mid} (\check{U})) = (\check{U} \check{\mid} a^* \check{U}'). \quad (2.9)$$

2) Если $V = V'$, то $\psi = \psi'$ и

$$(\check{U} \check{\mid} \check{U}') \in \mathcal{F}. \quad (2.10)$$

Фазы $(\check{U} \check{\mid} \check{U}')$ в этом случае есть периоды ψ , т. е.

значения $\frac{1}{2} \int_{\gamma} [z, dz]$ на замкнутых кривых $\gamma \subset V$:

$$(\check{U} \check{\mid} \check{U}') = \int \sum_{z \in V} \sum_{\check{z}, \check{z}'} \beta_0(\check{z}) \overline{\beta'_0(\check{z}')} e^{v[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')] } \eta \left(\text{mod } \frac{1}{v} \right); \quad (2.11)$$

здесь использованы обозначения теоремы 2.2, $\check{z}$ и $\check{z}'$ — точки $\text{supp } \check{U}$ и $\text{supp } \check{U}'$, проектирующиеся в $z \in V$.

Очевидно, что

$$0 \leq (\check{U} \mid \check{U}) \in \mathcal{F}. \quad (2.12)$$

Полунорма $\check{U}$

$$0 \leq (\check{U} \mid \check{U})^{1/2} \in \mathcal{C}$$

удовлетворяет неравенству треугольника и неравенству Шварца $|(\check{U} \mid \check{U})| \leq (\check{U} \mid \check{U})^{1/2} \cdot (\check{U}' \mid \check{U}')^{1/2}$ в $\mathcal{C}$.

3) Если V и V' трансверсальны, то мы считаем, что $(\check{V}$ и V' снабжены ориентацией):

$$v^{1/2} (\check{U} \mid \check{U}') \in \mathcal{F}, \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{|v|}{2\pi i}\right)^{1/2} (\check{U} \mid \check{U}') =$$

$$= \sum_{z \in V \cap V'} \left| \frac{\eta_0 \wedge \eta'_0}{d^{2l} z} \right|^{1/2} \sum_{\check{z}, \check{z}'} \beta_0(\check{z}) \overline{\beta'_0(\check{z}')} e^{v[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')] - \frac{\pi i}{2} m(\lambda'_4, \lambda_4)} \pmod{\frac{1}{v}}, \quad (2.14)$$

где

$\eta_0 \wedge \eta'_0$ и $d^{2l} z$ — меры на Z , определенные соответственно формулами (5.11) и (5.15) (§ 1) в точке $z \in V \cap V'$; $\check{z}$ и $\check{z}'$ — точки $\text{supp } \check{U}$ и $\text{supp } \check{U}'$, проектирующиеся в z ;

m — индекс Маслова, определенный по mod 4 (гл. 1, § 3, теорема 1); λ_4 и λ'_4 — 2-ориентированные лагранжевы плоскости, касающиеся $\check{V}$ и $\check{V}'$ соответственно в точках $\check{z}$ и $\check{z}'$.

Доказательство. 1) Определение 2.3, п. 1) теоремы 5.1 (§ 1), п. 4) теоремы 6 (§ 1) и определение 1.2 сопряженных лагранжевых операторов.

Доказательство (2.10). Определение 2.3 и формула 5.4 (§ 1).

Доказательство (2.11). Теорема 5.2 (§ 1) и тот факт, что $a\check{U} \pmod{\frac{1}{v}}$ есть произведение $\check{U}$ на функцию a_0^0 .

Доказательство (2.12). Применим разложение единицы [п. 3 теоремы 1.2] $\sum_j b_j^* \circ b_j = 1$, достаточно мелкое для того, чтобы для всех j существовал репер R_j , такой, что

$$\text{supp } b_j \cap \Sigma_{R_j} = \emptyset.$$

Мы имеем тогда

$$|(\check{U} \mid \check{U}')| = \sum_j (b_j \check{U}_{R_j} \mid b_j \check{U}_{R_j}) \geq 0 \quad (\S 1, \text{определение 5}),$$

Доказательство неравенства Шварца. В силу определения 5.1 § 1 неравенство Шварца и неравенство треугольника

имеют место в $\mathbf{R}$ (§ 1, (5.3)) и в $\mathcal{C}$ (§ 1, замечание 1). Отсюда имеем

$$\begin{aligned} |(\check{U} \check{\mid} \check{U}')| &= \left| \sum_j (b_j \check{U}_{R_j} \check{\mid} b_j \check{U}'_{R_j}) \right| \leq \sum_j |(b_j \check{U}_{R_j} \check{\mid} b_j \check{U}'_{R_j})| \leq \\ &\leq \sum_j (b_j \check{U}_{R_j} \check{\mid} b_j \check{U}_{R_j})^{1/2} \cdot (b_j \check{U}_{R_j} \check{\mid} b_j \check{U}'_{R_j})^{1/2} \leq \\ &\leq \left[\sum_j (b_j \check{U}_{R_j} \check{\mid} b_j \check{U}_{R_j}) \right]^{1/2} \cdot \left[\sum_j (b_j \check{U}'_{R_j} \check{\mid} b_j \check{U}'_{R_j}) \right]^{1/2} = \\ &= (\check{U} \check{\mid} \check{U})^{1/2} \cdot (\check{U}' \check{\mid} \check{U}')^{1/2}. \end{aligned}$$

Неравенство треугольника следует из неравенства Шварца.

Доказательство. 3) Теорема 5.3 (§ 1).

Замечание 2.2. Если $V = V'$, то $(\check{U} \check{\mid} \check{U}')$ определено правой частью формулы (5.4) (§ 1) при условии, что

$$\text{supp } \check{U} \cap \check{\Sigma}_R = \emptyset, \quad \text{supp } \check{U}' \cap \check{\Sigma}_R = \emptyset.$$

Если это условие не выполнено, то интеграл в формуле (5.4) расходится вследствие теоремы 2.2 (о структуре лагранжевых функций). Таким образом, определение 2.3 скалярного произведения придает смысл этому расходящемуся интегралу.

3. Лагранжевы функции на V

Нас интересуют не функции на $\check{V}$, т. е. многозначные функции на V , а функции на V . Их определение потребует выбора числа $v_0 \in i]0, \infty[$.

Первая группа гомотопий $\pi_1[V]$ действует на $\check{V} : V$ есть факторпространство $\check{V}$ по $\pi_1[V]$; очевидно, $\forall R \pi_1[V]$ оставляет $\check{\Sigma}_R$ инвариантным; положим $\forall \gamma \in \pi_1[V]$, $\psi(\gamma\check{z}) = \psi(\check{z}) + c_\gamma$, $\varphi_R(\gamma\check{z}) = \varphi_R(\check{z}) + c_\gamma$, где $c_\gamma = \frac{1}{2} \int_\gamma [z, dz]$; другими словами,

$$\psi \circ \gamma^{-1} = \psi - c_\gamma, \quad \varphi_R \circ \gamma^{-1} = \varphi_R - c_\gamma.$$

Определение 3. 1. Группа $\pi_1[V]$ автоморфизмов $\mathcal{F}(\check{V})$. Пусть

$$\check{U}_R = \sum_{r \in N} \frac{\alpha_{R,r}}{v^r} e^{v\varphi_R} \in \mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R), \quad \gamma \in \pi_1[V]. \quad (3.1)$$

Определим преобразование $\check{U}_R$ с помощью γ не формулой

$$\check{U}_R \circ \gamma^{-1} = e^{-v c_\gamma} \sum_{r \in N} \frac{\alpha_{R,r} \cdot \gamma^{-1}}{v^r} e^{v\varphi_R} \notin \mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R),$$

а так:

$$\gamma \check{U}_R = e^{(\gamma - \gamma_0) \cdot c} \gamma \check{U}_R \circ \gamma^{-1} = e^{-\gamma_0 \cdot c} \gamma \sum_{r \in N} \frac{\alpha_{R,r} \circ \gamma^{-1}}{\gamma^r} e^{\gamma \Phi_R} \in \mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R). \quad (3.2)$$

Очевидно, что $\gamma'(\gamma \check{U}_R) = (\gamma' \gamma) \check{U}_R$. Следовательно, $\pi_1[V]$ можно рассматривать, как группу автоморфизмов $\mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$.

Из формулы 3.2 и определения оператора $S \in Sp_2(l)$, данного в гл. II, § 1 (лемма 1.1, п. 1), теоремы 4.1, теоремы 4.3 следует, что S и γ коммутируют: если

$\check{U}_{R'} \in \mathcal{F}(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'}, R')$ и $R = SR'$, то

$$\gamma(S \check{U}_{R'}) = S(\gamma \check{U}_{R'}). \quad (3.3)$$

Если $\check{U}_R$ — выражения одной и той же лагранжевой функции $\check{U}$, определенной на $\check{V}$, то $\gamma \check{U}_R$ будут также выражениями для одной и той же лагранжевой функции на $\check{V}$. Обозначим ее $\gamma \check{U}$. Таким образом, $(\gamma \check{U})_R = \gamma \check{U}_R$ и $\pi_1[V]$ есть группа автоморфизмов $\mathcal{F}(\check{V})$.

Очевидно, что $\forall \gamma \in \pi_1(V)$, $\forall \check{U} \in \mathcal{F}(\check{V})$, $\forall a$ — лагранжев оператор, мы имеем

$$\text{supp } \gamma \check{U} = \gamma \text{supp } \check{U}; \quad (3.4)$$

γ и a коммутируют, т. е.

$$\gamma(a \check{U}) = a(\gamma \check{U}). \quad (3.5)$$

Определение 3.2. Лагранжевой функцией на V называется функция U , лагранжева на $\check{V}$ и обладающая следующими тремя свойствами, которые, очевидно, попарно эквивалентны и, следовательно, не зависят от выбора 2-репера R .

I. U инвариантна относительно $\pi_1[V]$, т. е.

$$\forall \gamma \in \pi_1[V] \gamma U = U \text{ (см. определение 3.1)}.$$

II. $\forall r \in N e^{-\gamma_0 \cdot c} \gamma \alpha_{R,r} \circ \gamma^{-1}$ не зависит от $\gamma \in \pi_1[V]$.

III. Функция, называемая ограничением U_R на γ_0 ,

$$U_R^0 = \sum_{r \in N} \frac{\alpha_{R,r}}{\gamma^r} e^{\gamma_0 \Phi} = U_R e^{(\gamma_0 - \gamma) \Phi_R} \quad (3.6)$$

принимает одно и то же значение во всех точках $\check{V}$, имеющих одну и ту же проекцию на V , и является, следовательно, функцией

$$U_R^0: V \setminus \Sigma_R \rightarrow \mathcal{F}^0,$$

Носитель лагранжевой функции U инвариантен относительно $\pi_1[V]$. Следовательно, это есть множество точек $\check{V}$, проектирующихся в замкнутую часть V , которую мы будем называть носителем U в V и обозначать $\text{supp } U$. Таким образом,

$$\forall R \text{ sup} U_R^0 = \text{supp } U \setminus \Sigma_R \cap \text{supp } U.$$

Множество всех лагранжевых функций¹⁾ на V (и функций с компактным носителем на V) есть векторное пространство над алгеброй $\mathcal{F}^0$. Оно обозначается $\mathcal{F}(V)$ [и $\mathcal{F}_0(V)$].

Очевидно, в силу (3.5) имеет место

Теорема 3.1. *Алгебра лагранжевых операторов a, b , определенных на $\Omega \supset V$, действует на пространстве $\mathcal{F}(V)$ лагранжевых функций на V :*

$$a \circ bU = a(bU), \quad \text{supp } (aU) \subset \text{supp } a \cap \text{supp } U.$$

Скалярное произведение лагранжевых функций на V будет определено с помощью следующей леммы:

Лемма 3.1. *Существует единственный эпиморфизм*

$$\mathcal{F}_0(\check{V}) \ni \check{U} \mapsto U = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \gamma \check{U} \in \mathcal{F}_0(V). \quad (3.7)$$

Доказательство. Определение (3.7) имеет смысл: оно определяет U как конечную сумму, потому, что $\forall \check{z} \in \check{V}$ — число γ , таких, что $\gamma \check{z} \in \text{supp } \check{U}$ конечно. Очевидно, что U инвариантна относительно $\pi_1[V]$ и имеет компактный носитель. Так как γ коммутирует с разложением единицы (определение 1.4; теорема 1.2), то для доказательства того, что (3.7) есть эпиморфизм, достаточно доказать, что всякая $U \in \mathcal{F}_0(V)$ с компактным односвязным носителем есть образ некоторой $\check{U} \in \mathcal{F}_0(\check{V})$ при отображении (3.7). Вот это доказательство.

Часть $\check{V}$, которая проектируется в ω , имеет в качестве связных компонент всевозможные преобразования $\gamma \check{\omega}$ какой-то одной из этих компонент $\check{\omega}$ с помощью различных элементов $\gamma \in \pi_1[V]$. Пусть $\check{U}$ — лагранжева функция на $\check{V}$, равная нулю вне $\check{\omega}$ и равная U на $\check{\omega}$ $\gamma \check{U}$, следовательно, равная нулю вне $\gamma \check{\omega}$ и равная $U = \gamma U$ на $\gamma \check{\omega}$. Отсюда

$$U = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \gamma \check{U}.$$

Выясним понятие ограничения на v_0 .

¹⁾ Нетривиальные лагранжевы функции существуют не на всяком лагранжевом многообразии — см. § 3, п. 6. — *Прим. ред.*

Определение 3.3. Пусть $\mathcal{I}$ — идеал в $\mathcal{F}$, порожденный элементами

$$e^{v\varphi} - e^{v_0\varphi} \quad (\varphi \in \mathbf{R}).$$

Всякий элемент из $\mathcal{I}$ записывается единственным образом в виде

$$\sum_{j \in J} \alpha_j (e_j^{v\varphi} - e_j^{v_0\varphi}) \quad (J — \text{конечное множество, } \alpha_j \in \mathcal{F}^0, \varphi_j \in \mathbf{R}).$$

$\mathcal{F}$ есть прямая сумма $\mathcal{I}$ и $\mathcal{F}^0$. Мы назовем ограничением $\mathcal{F}$ на v_0 проекцию $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^0$:

$$\mathcal{F} \ni u = \sum_j \alpha_j e_j^{v\varphi} \mapsto u^0 = \sum_j \alpha_j e_j^{v_0\varphi} \in \mathcal{F}^0 = \mathcal{F}/\mathcal{I}.$$

В частности, если $U \in \mathcal{F}(V)$, тогда ограничение $U_R(v, \check{z}) \in \mathcal{F}$ на v_0 есть значение ограничения U_R^0 функции U_R на v_0 в точке $\check{z}$, в которую проектируется $\check{z}$.

Определение 3.4. Назовем *подмодулем* $\mathcal{C}$ всякую аддитивную подгруппу $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$, обладающую свойствами: $\mathcal{F} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{C}$; $\mathcal{M} = \bar{\mathcal{M}}$ (комплексно-сопряженная); умножение в алгебре $\mathcal{C}$ обращает $\mathcal{M}$ модуль над алгеброй $\mathcal{F}$.

В частности, если $u \in \mathcal{M}$, $\varphi \in \mathbf{R}$, то $ue^{v\varphi} \in \mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{N}$ — подмодуль $\mathcal{M}$, элементы которого имеют вид

$$\sum_{j \in J} u_j (e_j^{v\varphi} - e_j^{v_0\varphi}) \quad (J — \text{конечное множество } u_j \in \mathcal{M}, \varphi_j \in \mathbf{R}).$$

Мы назовем *ограничением* $\mathcal{M}$ на v_0 фактормодуль

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{N} = \mathcal{M}^0;$$

$\mathcal{M}^0$ есть модуль над алгеброй $\mathcal{F}^0$. Так как $\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}}$, то понятие сопряженных элементов $\mathcal{M}^0$ индуцировано понятием сопряженных элементов $\mathcal{M}$.

Пример 3.1. Если $\mathcal{M} = \mathcal{F}$, то $\mathcal{M}^0 = \mathcal{F}^0$.

Пример 3.2. Обозначим $\frac{1}{|v|^s} \mathcal{F}, \dots$ образы $\mathcal{F}, \dots$ при умножении:

$$\mathcal{C} \ni \tilde{f} \rightarrow \frac{1}{|v|^s} \tilde{f} \in \mathcal{C} \quad (s \in \mathbf{R}_+).$$

$$\text{Если } \mathcal{M} = \frac{1}{|v|^s} \mathcal{F}, \text{ то } \mathcal{M}^0 = \frac{1}{|v|^s} \mathcal{F}^0.$$

Определение 3.5. *Скалярное произведение* $(\cdot | \cdot)$. Пусть V и V' — два лагранжевых многообразия в Z . Пусть $\mathcal{M}$ — подмодуль $\mathcal{C}$ (определение 3.4), такой, что

$$\forall \check{U} \in \mathcal{F}_0(\check{V}), \quad \forall \check{U}' \in \mathcal{F}_0(\check{V}') \quad (\check{U} | \check{U}') \in \mathcal{M}. \quad (3.8)$$

Каковы бы ни были

$$U \in \mathcal{F}_0(V), \quad U' \in \mathcal{F}_0(V),$$

согласно лемме 3.1, существуют $\check{U} \in \mathcal{F}_0(\check{V})$ и $\check{U}' \in \mathcal{F}_0(\check{V}')$, такие, что

$$U = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \gamma \check{U} \quad U' = \sum_{\gamma' \in \pi_1[V']} \gamma' \check{U}'.$$

По определению скалярное произведение

$$(U | U') = (\check{U} | \check{U}')^0, \quad (3.9)$$

т. е. ограничение $(\check{U} | \check{U}') \in \mathcal{M}$ на v_0 .

Значения этого скалярного произведения принадлежат, следовательно, $\mathcal{M}^0$.

Это определение корректно, как показывает

Лемма 3.2. $(\check{U} | \check{U}')^0$ зависит только от U и U' .

Доказательство. Пусть задано разложение единицы

$$\sum_j b_j^* \circ b_j = 1.$$

Тогда

$$(\check{U} | \check{U}') = \sum_j (b_j \check{U} | b_j \check{U}').$$

Поэтому достаточно доказать, что $(b_j \check{U} | b_j \check{U}')^0$ зависит только от $\sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \gamma b_j \check{U} = b_j U$ и $\sum_{\gamma' \in \pi_1[V']} \gamma' b_j \check{U}' = b_j U'$. В силу теоремы 1.2 достаточно доказать лемму, когда выполнены следующие условия:

(i) Существует 2-репер R , такой, что

$$\check{U}_R \in \mathcal{F}_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R), \quad \check{U}'_R \in \mathcal{F}_0(\check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R, R).$$

(ii) Существуют две открытые односвязные области $\omega \in V$ и $\omega' \in V'$, которые R_X инъективно проектируют на X и которые содержат носители U и U' :

$$\text{supp } U \subset \omega \subset V; \quad \text{supp } U' \subset \omega' \subset V',$$

Часть $\check{V}$, которая проектируется в ω , имеет связные компоненты $\gamma \check{\omega}$ где $\gamma \in \pi_1[V]$ (ср. доказательство леммы 3.1).

Если задано $x \in \text{supp } U$, мы обозначим z единственную точку ω , такую, что $R_X z = x$, $\check{z}$ — единственную точку ω , проектируемую на $z \in V$.

В силу определения 2.3, формулы (1.9) § 1 и определения 5.1 мы имеем

$$(\tilde{U} | \tilde{U}') = \int_X (\Pi_R \tilde{U}_R)(v, x) \cdot \overline{(\Pi_R \tilde{U}'_R)(v, x)} d^l x. \quad (3.10)$$

Далее, согласно § 1 (теорема 2. 1), если $x \in \text{supp}(\Pi_R \tilde{U}_R) = R_x \text{supp } U$,

$$(\Pi_R \tilde{U}_R)(v, x) = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \tilde{U}_R(v, \gamma^{-1} \check{x}),$$

т. е. в силу (3. 2)

$$(\Pi_R \tilde{U}_R)(v, x) = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} e^{(v_0 - v) \cdot c_\gamma} \gamma \tilde{U}_R(v, \check{x}).$$

Подставим в (3.10) это выражение $\Pi_R \tilde{U}'_R$ и аналогичное выражение $\Pi_R \tilde{U}_R$. Мы получим формулу

$$(\tilde{U} | \tilde{U}') = \int_X U_R(v, \check{x}) \cdot \overline{U'_R(v, \check{x}')} d^l x \pmod{\mathcal{N}}, \quad (3.11)$$

которая верна, если выполнены условия (i) и (ii) (см. определение 3.4 для $\mathcal{N}$ и формулу (3.7), выражающую U через $\tilde{U}$).

Формула (3.11) доказывает лемму 3.2 и служит также для доказательства следующей теоремы, утверждение 1) которой очевидно.

Теорема 3.2. (о скалярном произведении). 1) Пусть V и V' — два лагранжевых многообразия в Z . Скалярное произведение $(\cdot | \cdot)$ есть билинейная функция пары U и U' лагранжевых функций на V и V' со значениями в $\mathcal{F}^0$. $(U | U')$ определено, когда множество $\text{supp } U \cap \text{supp } U'$ компактно; $(U | U') \in \mathcal{M}^0$, где $\mathcal{M}^0$ — модуль над $\mathcal{F}^0$, зависящий от V и V' ; $(U | U')$ зависит только от поведения U и U' в окрестности $\text{supp } U \cap \text{supp } U'$; $(U | U') = 0$, если $\text{supp } U \cap \text{supp } U' = \emptyset$; $(U | U')$ и $(U' | U)$ — комплексно сопряжены; $(aU | U') = (U | a^* U')$, где a и a^* сопряженные лагранжевы операторы.

2) Предположим, что $V = V'$. Тогда $(U | U') \in \mathcal{F}^0$ (алгебра формальных чисел с нулевой фазой);

$$0 \leq (U | U), \quad (3.12)$$

из $(U | U) = 0$ следует $U = 0$. Норма U

$$0 \leq \|U\| = (U | U)^{1/2} \in \mathcal{F}^0 \quad (3.13)$$

удовлетворяет неравенству треугольника и неравенству Шварца: $\|U + U'\| \leq \|U\| + \|U'\|$; $|(U | U')| \leq \|U\| \cdot \|U'\|$ в $\mathcal{F}^0$.

Равенство достигается, только когда U и U' пропорциональны, т. е. или $U = 0$, или существует $\alpha \in \mathcal{F}^0$, такое, что $U' = \alpha U$. Обозначим

$$U_R^0(v, z) = \alpha_{R,0}(\check{z}) e^{v_0 \varphi_R(\check{z})} = \left(\text{mod } \frac{1}{v} \right), \quad (3.14)$$

$$= \left[\frac{\eta}{d_x^l} \right]^{1/2} \beta_0(\check{z}) e^{v_0 \varphi_R(\check{z})} \left(\text{mod } \frac{1}{v} \right). \quad (3.15)$$

Здесь $\check{z}$ означает какую-нибудь из точек $\check{V}$, проектирующихся в $z \in V$; формула (3.15) предполагает, что на $\check{V}$ задана 2-ориентация, которая определяет индекс Маслова $m_R(\check{z})$ и $\arg d^l x$ (гл. I, § 3, следствие 3). Лагранжева амплитуда β_0 не зависит от выбора R , но зависит от выбора η — регулярной меры на V , такой, что $\arg \eta = 0$. Тогда если употребить аналогичные обозначения для U' и обозначить $R_x z$ через x , то

$$\alpha_{R,0}(\check{z}) \overline{\alpha'_{R,0}(\check{z})} d^l x = \beta_0(\check{z}) \overline{\beta'_0(\check{z})} \eta \quad (3.16)$$

есть регулярная дифференциальная форма на V , не зависящая от R и

$$(U | U') = \int_V \alpha_{R,0}(\check{z}) \overline{\alpha'_{R,0}(\check{z})} d^l x = \int \beta_0(\check{z}) \overline{\beta'_0(\check{z})} \eta \left(\text{mod } \frac{1}{v} \right). \quad (3.17)$$

3) Предположим, что V и V' трансверсальны. Тогда

$$v^{l/2} (U | U') \in \mathcal{F}^0;$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{|v|}{2\pi i} \right)^{l/2} (U | U') &= \\ &= \sum_{z \in V \cap V'} [\text{Hess}(\varphi - \varphi')]^{\frac{1}{2}} \alpha'_{R,0}(\check{z}) \overline{\alpha'_{R,0}(\check{z}')} e^{v_0 [\varphi_R(\check{z}) - \varphi_R(\check{z}')] \text{mod } \frac{1}{v}} = \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$= \sum_{z \in V \cap V'} \left[\frac{\eta_0 \wedge \eta'_0}{d^{2l} z} \right]^{\frac{1}{2}} \beta_0(\check{z}) \overline{\beta'_0(\check{z}')} e^{v_0 [\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')] - \frac{\pi}{2} i m(\lambda'_4, \lambda_4)} \left(\text{mod } \frac{1}{v} \right). \quad (3.19)$$

В формуле (3.18) φ и φ' определены вблизи Rz так:

$$\varphi(x) = \varphi_R(\check{R}_X^{-1} x \cap \check{V}); \quad \varphi'(x) = \varphi'_R(\check{R}_R^{-1} x \cap \check{V}');$$

$$\text{Hess}(\varphi - \varphi') = \{\text{Hess}_x[\varphi(x) - \varphi'(x)]\}_{x=R_X z}.$$

В формуле (3.19) ψ есть лагранжева фаза V , $\lambda_4 \in \Lambda_4(Z)$ есть 2-ориентированная лагранжева плоскость, касательная к $\check{V}$ в точке z ; m — индекс Маслова, определенный по mod 4 (гл. I, § 3, теорема 1). $\eta_0 \wedge \eta'_0$ и $d^{2l} z$ — меры на Z , определенные формулами (5.11) и (5.15) (§ 1).

Доказательство формулы (3.16) — формула (5.9) § 1.

Доказательство (3.17). Применение достаточно мелкого разложения единицы $\sum_j b_j^* \circ b_j = 1$ показывает, что достаточно установить (3.17) при предположениях (i), (i, i), которые делались при доказательстве леммы 3.2 и из которых следует (3.11). Так как $V = V'$, формула (3.11) имеет вид

$$(U | U') = \int_X U_R^0(v, \check{z}) \overline{U_R'^0(v, \check{z})} d^l x \in \mathcal{F}^0, \quad (3.20)$$

откуда следует (3.17).

Доказательство (3.12). То же самое разложение единицы, что и выше, показывает, что достаточно доказать формулу (3.12) для случая, когда справедлива формула (3.20). В этом случае формула (3.12) становится очевидной, так же как и следующее утверждение:

$$\text{если } U \neq 0, \text{ то } (U | U) = \sum_{r=2s}^{\infty} \frac{\alpha_r}{v^r}, \quad \text{где } s \in \mathbf{N}, \alpha_{2s} > 0.$$

Доказательство (3.13). Предыдущая формула и утверждение 2) теоремы 2.3.

Доказательство неравенства Шварца. Пусть U и U' не пропорциональны. Тогда существуют $\alpha \in \mathcal{F}^0$ и $s \in \mathbf{N}$, такие, что

$$U = \alpha U' + \frac{1}{v^s} U''.$$

Лагранжевы амплитуды β'_0 и β''_0 функций U' и U'' не пропорциональны; классическое вычисление дает

$$\|U\|^2 \cdot \|U'\|^2 - |(U | U')|^2 = \frac{1}{v^{2s}} [\|U'\|^2 \cdot \|U''\|^2 - |(U' | U'')|^2].$$

Достаточно, следовательно, доказать, что правая часть > 0 в $\mathcal{F}^0$. Другими словами, достаточно доказать, что U и U' удовлетворяют строгому неравенству Шварца, когда их лагранжевы амплитуды β_0 и β'_0 не пропорциональны. Но в силу (3.17)

$$\begin{aligned} \|U\|^2 \cdot \|U'\|^2 - |(U | U')|^2 &= \\ &= \int_V |\beta_0(z)|^2 \eta \cdot \int_V |\beta'_0(z)|^2 \eta - \left| \int_V \beta_0(z) \overline{\beta'_0(z)} \eta \right|^2 \left(\text{mod } \frac{1}{v} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу классического неравенства Шварца

$$\|U\|^2 \cdot \|U'\|^2 - |(U|U')|^2 = \alpha_0 \left(\bmod \frac{1}{v} \right), \text{ где } 0 < \alpha_0 \in \mathbf{R},$$

откуда в силу теоремы 2.3 гл. II, § 1

$$|(U|U')| < \|U\| \cdot \|U'\|.$$

Доказательство неравенства треугольника — неравенство Шварца.

Доказательство. 3) Разложение единицы доказывает, что достаточно рассмотреть случай, когда $(U|U')$ выражается формулой (3.11). Но тогда (3.18) вытекает из утверждения 3) теоремы 5.1 (§ 1), а (3.19) — из теоремы 5.3 (§ 1).

Замечание 3. Если не выполнено предположение 1 (ср. доказательство леммы 3.2), то интеграл в правой части формулы (3.20) расходится (ср. теорему 2.2 о структуре лагранжевых функций). *Определение 3.5 скалярного произведения придает, следовательно, смысл этому расходящемуся интегралу.*

4. Группа $Sp_2(Z)$

Группа $Sp_2(Z)$ автоморфизмов 2-симплектической геометрии Z (ср. гл. I, § 3, п. 4) преобразует, очевидно, лагранжевы операторы в лагранжевы операторы и лагранжевы функции в лагранжевы функции. Скалярное произведение инвариантно относительно действия этой группы.

5. Лагранжевы обобщенные функции

Лагранжевы обобщенные функции определяются с помощью замены функций на обобщенные функции в определениях 2.1, 3.1 и 3.2. Теоремы 2.1, 2.2 (где β_{Rr} — обобщенные функции), 2.3 и 3.1 применимы к обобщенным функциям как к функциям.

Определение 2.3 и теорема 2.4, 2) применимы к *скалярному произведению* $(\check{U}|\check{U}')$, где $\check{U}$ — функция, $\check{U}'$ — обобщенная функция на одном и том же многообразии $\check{V}$, если $\text{supp } \check{U} \cap \text{supp } \check{U}'$ — компактное множество.

Точно так же справедливы определение 3.5 и теорема 3.2, 2) если рассматривается скалярное произведение $(U|U')$, где U — лагранжева функция, U' — лагранжева обобщенная функция на V и $\text{supp } U \cap \text{supp } U'$ компактно.

§ 3. ОДНОРОДНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ

0. Резюме

Существование обратного оператора a^{-1} для лагранжева оператора a при предположении, сделанном в формулировке теоремы 1.1 § 2, показывает, что изучение однородных лагранжевых систем с одной (§ 3) или несколькими (§ 4) неизвестными функциями не является банальным. В § 3 и 4 мы начнем это изучение. Главы III и IV завершат его в двух специальных случаях — уравнения Шредингера и уравнения Дирака, которое представляет собой систему с четырьмя неизвестными.

1. Лагранжевы многообразия, на которых определены лагранжевы решения уравнения $aU = 0$

Пусть a — лагранжев оператор, ассоциированный с формальной функцией

$$a^0 : \Omega \rightarrow \mathcal{F}^0 \quad (\Omega \text{ — открытое множество в } Z),$$

где

$$a^0(v, z) = \sum_{r \in N} \frac{1}{v^r} a_r^0(z).$$

Теорема 1. *Носитель решения U уравнения $aU = 0$ есть лагранжево многообразие V , на котором $a_0^0 = 0$.*

Доказательство. Предположим, что в некоторой точке V $a_0^0 \neq 0$. Заменим Ω окрестностью этой точки, в которой $a_0^0 \neq 0$. Тогда в этой окрестности существует a^{-1} и из $aU = 0$ следует, что в этой окрестности $U = 0$.

Мы предположим, что значения a_0^0 действительны и что часть Ω , на которой $a_0^0 = 0$, есть регулярная гиперповерхность W с уравнением

$$W : H(z) = 0, \quad H_z \neq 0.$$

V является, следовательно, подмногообразием W , таким, что

$$\dim V = l; \quad d[z, dz] = 0 \text{ на } V.$$

Для изучения V к форме Пфаффа $[z, dz]$ применяется теория дифференциальных форм Э. Картана [5].

2. Теория Э. Картана [5] форм Пфаффа

Напомним сначала хорошо известные результаты, изложенные, в частности, в книге И. Шоке-Брюа [6].

Пусть ω — дифференциальная форма, определенная на Z . Z в этом пункте будет предполагаться произвольным бесконечно дифференцируемым многообразием конечной размерности. Э. Картан указал локальное выражение ω с помощью минимального числа функций

$$f_1, \dots, f_n: Z \rightarrow \mathbb{R}.$$

Число этих функций n называется рангом ω . Эти функции представляют собой максимальное число независимых первых интегралов системы вполне интегрируемых уравнений Пфаффа, называемых *характеристической системой* ω . Э. Картан дал явное выражение этой системы.

Другими словами, эта характеристическая система эквивалентна системе

$$df_1 = \dots = df_n = 0.$$

Существует дифференциальная форма $\bar{\omega}$, такая, что

$$\omega(z, dz) = \bar{\omega}(f(z), df(z)), \text{ где } f = (f_1, \dots, f_n).$$

Пусть ω — форма Пфаффа, определенная на Z (т. е. дифференциальная форма первой степени относительно дифференциалов). Если обозначить через i_ξ внутреннее произведение на вектор $\xi \in Z$ [6], то характеристическая система записывается так:

$$\forall \xi \quad i_\xi d\omega(z, dz) = 0. \quad (2.1)$$

Ранг $d\omega$ — четное число. Обозначим его $2n$. Пусть локально

$$f = (f_1, \dots, f_{2n})$$

— $2n$ независимых первых интегралов (2.1). Существует, следовательно, дифференциальная форма $\bar{\omega}'$, такая, что

$$d\omega(z, dz) = \bar{\omega}'(f(z), df(z)).$$

Очевидно, что $d\bar{\omega}' = 0$, поэтому локально $\bar{\omega}' = d\bar{\omega}$.

Другими словами, локально существует форма Пфаффа ω с $2n$ переменными и функция f_0 , такие, что

$$\omega(z, dz) = df_0(z) + \bar{\omega}(f(z), df(z)), \text{ где } f = f(f_1, \dots, f_{2n}). \quad (2.2)$$

Ранг ω равен, очевидно, $2n$ или $2n + 1$ в зависимости от того, является ли f_0 функцией от $f = (f_1, \dots, f_{2n})$ или нет. В первом случае можно выбрать $\bar{\omega}$ таким образом, чтобы $f_0 = 0$.

Сформулируем менее известные дополнения, которые Э. Картан [5] (гл. XII. Уравнения, допускающие относитель-

ный интегральный инвариант) сделал к этому результату, и напомним их доказательства.

Лемма 2. Пусть ω — форма Пфаффа. Пусть ранг $d\omega$ равен $2n$. Существует локально на Z $2n+1$ функций $f_0, \dots, f_{2n}$, таких, что

$$\omega(z, dz) = df_0(z) + \sum_{j=1}^n f_{2j-1}(z) df_{2j}(z); \quad (2.3)$$

$f_1, \dots, f_{2n}$ — $2n$ независимых первых интегралов характеристической системы $d\omega$.

Замечание 2.1. $f_1, \dots, f_{2n}$ не является при этом произвольной системой первых интегралов характеристической системы; см. замечание 2.2.

Доказательство. Пусть f_2 — первый интеграл характеристической системы $d\omega$. Ограничение $d\omega$ на гиперповерхность $f_2 = \text{const}$ имеет четный ранг $< 2n$, т. е. $\leq 2(n-1)$. Пусть f_4 — первый интеграл характеристической системы этого ограничения; ограничение $d\omega$ на многообразия

$$f_2 = \text{const}, \dots, f_{2j} = \text{const}$$

имеет ранг $\leq 2(n-j)$ и, следовательно, равно нулю для каждого значения J индекса j , где $J \leq n$. Другими словами, $d\omega = 0$ на многообразиях $f_2 = \text{const}, \dots, f_{2J} = \text{const}$. Существует, следовательно, функция f_0 , такая, что

$$\omega = df_0 \pmod{(df_2, \dots, df_{2J})},$$

т. е. такая, что

$$\omega = df_0 + \sum_{j=1}^J f_{2j-1} df_{2j}.$$

Но ранг $d\omega$ равен $2n$. Следовательно, $J = n$; $f_1, \dots, f_{2n}$ — $2n$ независимых первых интегралов характеристической системы ω .

Э. Картан дополнил эту лемму, применяя понятие скобки Пуассона.

Определение 2. Пусть ω — форма Пфаффа, представленная в виде (2.3). Пусть g и g' — два первых интеграла характеристической системы $d\omega$. Это, следовательно, сложные функции

$$z \mapsto g(z) = G[f_1(z), \dots, f_{2n}(z)]; \quad z \mapsto g'(z) = G'[f_1(z), \dots, f_{2n}(z)].$$

Существует сложная функция такого же типа, называемая скобкой Пуассона g и g' и обозначаемая (g, g') , такая, что

$$n(d\omega)^{n-1} \wedge dg \wedge dg' = (g, g')(d\omega)^n. \quad (2.4)$$

Эта скобка

$$(g, g') = -(g', g),$$

которая, следовательно, билинейна и не зависит от выбора $f = (f_1, \dots, f_{2n})$, имеет при данном выборе следующее выражение:

$$(g, g')(z) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial G}{\partial f_{2j-1}} \frac{\partial G'}{\partial f_{2j}} - \frac{\partial G'}{\partial f_{2j-1}} \frac{\partial G}{\partial f_{2j}} \right]_{f=f(z)}. \quad (2.5)$$

Отсюда можно вывести, что всякая тройка g, g', g'' первых интегралов удовлетворяет тождеству Якоби:

$$(g, (g', g'')) + (g' (g'', g)) + (g'', (g, g')) = 0.$$

Если $(g, g') = 0$, то говорят, что g и g' находятся в инволюции.

Замечание 2.2. В выражение (2.3) для ω пары f_j, f_k ($1 \leq j \leq k$) находятся в инволюции, за исключением пар f_{2j-1}, f_{2j} . Для этих пар скобка Пуассона

$$(f_{2j-1}, f_{2j}) = 1.$$

Замечание 2.3. Пусть $g_1, \dots, g_q$ — независимые первые интегралы характеристической системы $d\omega$. Ограничение ω на многообразии

$$g_1 = \text{const}, \dots, g_q = \text{const}$$

уменьшает ранг $d\omega$ на четное число, для которого Э. Картан [5], гл. XII, п. 124 дал следующее выражение. Оно равно $2(q-r)$, если все скобки Пуассона (g_i, g_k) ($i, k \in \{1, \dots, q\}$) являются сложными функциями $g_1, \dots, g_q$ и если $2r$ есть ранг внешней формы

$$\sum_{i,k} (g_i, g_k) \xi_i \wedge \xi_k$$

от переменных $\xi_1, \dots, \xi_q$ на этом многообразии.

Отсюда, в частности, ($q = n, r = 0$) следующая теорема, которая понадобится при изучении уравнения Шредингера и позволит доказать теорему 3.1 этого параграфа, также нужную для изучения этого уравнения.

Теорема 2. Пусть ω — форма Пфаффа и $2n$ — ранг $d\omega$.

1) Характеристическая система для $d\omega$ локально имеет наборы $\{f_2, f_4, \dots, f_{2n}\}$ из n независимых первых интегралов, которые попарно находятся в инволюции друг к другу.

2) Если задан один из таких наборов, то с помощью квадратур локально определяются $n+1$ функций $f_0, f_1, f_3, \dots, f_{2n-1}$, таких, что ω имеет выражение (2.3) и $f_1, f_2, f_3, \dots$

..., f_{2n} — независимые первые интегралы характеристической системы для $d\omega$.

Доказательство. 1) Лемма 2 и замечание 2.2.

2) Согласно гипотезе,

$$df_2 \wedge df_4 \wedge \dots \wedge df_{2n} \neq 0, \quad \forall j, k \quad d\omega^{n-1} \wedge df_{2j} \wedge df_{2k} = 0.$$

Другими словами, существуют дифференциальные формы θ_j , такие, что

$$(d\omega)^{n-1} = \sum_{j=1}^n \theta_j \wedge df_2 \wedge \dots \hat{\wedge} df_{2j} \wedge \dots \wedge df_{2n}$$

(знак $\hat{\wedge}$ означает, что находящийся под ним множитель отсутствует). Это выражение означает, что существуют формы ϑ_j , такие, что

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \vartheta_j \wedge df_{2j},$$

т. е. $d\omega = 0 \pmod{(df_2, \dots, df_{2n})}$.

Это, в свою очередь значит, что существует функция f_0 , такая, что $\omega = df_0$ при условии $f_2 = \text{const}, \dots, f_{2n} = \text{const}$; т. е. существуют $n+1$ функций $f_0, f_1, f_3, \dots, f_{2n-1}$, удовлетворяющих (2.3).

3. Лагранжевы многообразия симплектического пространства и его гиперповерхности

Положим

$$\omega(z, dz) = \frac{1}{2} [z, dz], \quad (3.1)$$

т. е. в некотором репере R

$$\omega(z, dz) = \frac{1}{2} \langle p, dx \rangle - \frac{1}{2} \langle dp, x \rangle = \langle p, dx \rangle - \frac{1}{2} d \langle p, x \rangle,$$

$$\text{где } Rz = (x, p); \quad (3.2)$$

$d\omega$, очевидно, имеет ранг $2l$: ее характеристическая система $dz = 0$.

Лагранжевы многообразия $V \subset Z$, т. е. многообразия размерности l , на которых $d\omega = 0$, это многообразия, локальные уравнения которых вне особого множества $\Sigma_R \subset V$ имеют вид

$$p = \varphi_{R,x}(x), \quad (3.3)$$

где φ_R — фаза V в репере R . Если V произвольно, то φ_R — произвольная функция.

Если задано $x \in V$, можно выбрать R , такое, что $x \notin \Sigma_R$, и в окрестности x пользоваться локальными уравнениями (3.3).

Однако, для того чтобы пользоваться одним-единственным репером, предыдущий результат следует уточнить следующим образом. Пусть x^j и p_j — двойственные координаты x и p .

Лемма 3.1. *Лагранжевы многообразия в Z , проекция которых с помощью $R_x: z \rightarrow x$ есть многообразия в X размерности $k \leq l$ с уравнениями*

$$x^j = F_j(x^1, \dots, x^k) \quad (k+1 \leq j \leq l), \quad (3.4)$$

есть многообразия V , локальные уравнения которых есть уравнения (3.4) и следующие уравнения:

$$p_i = \frac{\partial \varphi_R(x^1, \dots, x^k)}{\partial x^i} - \sum_{j=k+1}^l \frac{\partial F_j}{\partial x^i} p_j \quad (1 \leq i \leq k), \quad (3.5)$$

где φ_R — фаза V и $x^1, \dots, x^k, p_{k+1}, \dots, p_l$ — локальные координаты на V ; если V — произвольное многообразие, то φ_R — произвольная функция $x^1, \dots, x^k$.

Если $k = l$, то уравнения V сводятся к (3.3).

Если $k = 0$, то V — плоскость; $x = 0$, p — произвольно, φ_R — константа.

Доказательство.

$$\begin{aligned} d \langle p, dx \rangle &= \sum_{j=1}^k \left(dp_j + \sum_{i=k+1}^l \frac{\partial F_i}{\partial x^j} dp_i \right) \wedge dx^j = \\ &= d \sum_{i=1}^l \left(p_i + \sum_{j=k+1}^l \frac{\partial F_j}{\partial x^i} p_j \right) dx^i. \end{aligned}$$

Условие $d\omega = 0$ на V состоит, следовательно, в существовании на V функции φ_R от $(x^1, \dots, x^k)$, удовлетворяющей условиям (3.5). Условие $\dim V = l$ означает независимость $x^1, \dots, x^k, p_{k+1}, \dots, p_l$ на V .

Обозначения. Пусть задана функция $f: Z \rightarrow \mathbf{R}$ и репер R . Через f_R обозначим функцию $Z(l) \rightarrow \mathbf{R}$, такую, что $Rz = (x, p)$, $f_R(x, p) = f(z)$, т. е. такую, что $f_R \circ R = f$. Обозначим $f_{R,x^k} = \frac{\partial f_R}{\partial x^k}$, $f_{R,x} = (f_{R,x^1}, \dots, f_{R,x^l})$. Пусть W — гиперповерхность в Z с уравнением

$$W: H(z) = 0, \quad H_z \neq 0. \quad (3.6)$$

ω_W и f_W — ограничения ω и f на W .

Лемма 3.2 (Э. Картан). $d\omega_W$ имеет ранг $2l - 2$. Ее характеристическая система есть гамильтонова система:

$$\forall j, k \in \{1, \dots, l\} \quad \frac{\partial x^j}{H_{R, p_j}(x, p)} = - \frac{\partial p_k}{H_{R, x^k}(x, p)} \quad \text{на } W, \quad (3.7)$$

где вектор $(H_{R, p}, -H_{R, x})$ — очевидно, касательный вектор к W .

Доказательство. Условие

$$(d\omega)^{l-1} \wedge df_W = 0 \quad \text{на } W$$

можно записать в виде

$$\frac{(d\omega)^{l-1} \wedge df \wedge dH}{(d\omega)^l} = 0 \quad \text{на } W. \quad (3.8)$$

Если в формуле (2.4) взять за форму ω выражение (3.2) и положить $f_{2j-1} = p_j$ и $f_{2j} = x^j$, то в силу (2.4) и (2.5) это условие запишется так:

$$\sum_{j=1}^l (\dot{f}_{R, p_j} H_{R, x^j} - H_{R, p_j} \dot{f}_{R, x^j}) = 0 \quad \text{при } H_R = 0. \quad (3.9)$$

Это условие не удовлетворяется тождественно; следовательно, $(d\omega_W)^{l-1} \neq 0$. Но $(d\omega_W)^l = 0$, следовательно, ранг $d\omega_W$ равен $2(l-1)$ и эквивалентные соотношения (3.8) и (3.9) показывают, что f_W есть первый интеграл характеристической системы для $d\omega_W$. Эта система есть, следовательно, гамильтонова система (3.7).

Замечание 3.1. Мы будем употреблять на W в качестве локальных координат $2l - 2$ независимых первых интегралов гамильтоновой системы (3.7) и функцию t , такую, что система (3.7) может быть записана в виде

$$dx = H_{R, p}(x, p) dt; \quad dp = -H_{R, x}(x, p) dt. \quad (3.10)$$

Определение 3.1. Пусть задана функция $g: Z \rightarrow \mathbb{R}$; определим в точке z вектор $g_z \in Z$ соотношением

$$dg = [dz, g_z]. \quad (3.11)$$

Другими словами,

$$Rg_z = (g_{R, p}, -g_{R, x}). \quad (3.12)$$

Гамильтонову систему (3.10) в этих обозначениях можно записать тогда так:

$$dz = H_z dt. \quad (3.13)$$

В силу (2.5), где снова положено $f_{2j-1} = p_j$; $f_{2j} = x^j$, скобка Пуассона g и g' может тогда быть записана так:

$$(g, g') = \langle g'_{R, x}, g_{R, p} \rangle - \langle g_{R, x}, g'_{R, p} \rangle = [g_z, g'_z]. \quad (3.14)$$

Вектор $\kappa = H_z$ называется *характеристическим вектором*. Кривые на W , которые в каждой точке касаются этого вектора, называются *характеристическими кривыми*.

Приведем классическую теорему о решениях нелинейного дифференциального уравнения первого порядка относительно функции φ :

$$H_R(x, \varphi_x) = 0,$$

которая дает явное описание лагранжевых многообразий V .

Теорема 3.1. 1) Система Гамильтона (3.7) имеет наборы по $l-1$ независимых первых интегралов

$$h_1, h_2, \dots, h_{l-1},$$

которые попарно находятся в инволюции, т. е. таких, что $\forall j, k \in \{1, \dots, l-1\} (d\omega)^{l-2} \wedge dh_j \wedge dh_k = 0$ на W . (3.15)

Если задан один из таких наборов, то с помощью квадратуры локально определяются l функций

$$g_0, g_1, \dots, g_{l-1},$$

таких, что

$$\omega = dg_0 + \sum_{j=1}^{l-1} g_j dh_j \quad \text{на } W. \quad (3.16)$$

Функции $g_1, \dots, g_{l-1}, h_1, \dots, h_{l-1}$ составляют $2(l-1)$ независимых первых интегралов гамильтоновой системы (3.7). Если t определено формулой (3.10), то функции

$$t, h_1, \dots, h_{l-1}, g_1, \dots, g_{l-1} \quad (3.17)$$

задают локальные координаты на W ; g_0 — функция от этих координат.

2) Лагранжевы многообразия $V \in W$ — это многообразия, которые локально

(i) расслаиваются на характеристические кривые: t произвольно; $h_1 = \text{const}, \dots, h_{l-1} = \text{const}, g_1 = \text{const}, \dots, g_{l-1} = \text{const}$.

(ii) Базой B этого расслоения является лагранжево многообразие пространства $Z(l-1)$ с координатами

$$x' = (h_1, \dots, h_{l-1}), \quad p' = (g_1, \dots, g_{l-1}). \quad (3.18)$$

3) Если на W выбраны локальные координаты (3.17), то локальные уравнения лагранжева многообразия $V \subset W$ после

выбора соответствующей нумерации индексов имеют такой вид: для некоторого $k \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ выбираются $l-k$ действительных функций $F_0, F_{k+1}, \dots, F_{l-1}$ от k переменных и уравнения записываются так:

$$V: \begin{cases} h_j = F_j(h_1, \dots, h_k) & (k+1 \leq j \leq l-1), \\ g_i = \frac{\partial F_0(h_1, \dots, h_k)}{\partial h_i} - \sum_{j=k+1}^{l-1} \frac{\partial F_j}{\partial h_i} g_j & (1 \leq i \leq k), \end{cases} \quad (3.19)$$

$t, h_1, \dots, h_k, g_{k+1}, \dots, g_{l-1}$ — локальные координаты на V .
Лагранжева фаза V равна

$$\begin{aligned} \psi(t, h_1, \dots, h_k; g_{k+1}, \dots, g_{l-1}) &= \\ &= g_0(t; h_1, \dots, h_k; g_{k+1}, \dots, g_{l-1}) + F_0(h_1, \dots, h_k). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Если $k = l-1$, то (3.20) означает, что

$$g_i = \frac{\partial F_0(h_1, \dots, h_{l-1})}{\partial h_i} \quad (1 \leq i \leq l-1). \quad (3.21)$$

Если $k = 0$, то уравнения (3.20) дают

$$h = \text{const}, \quad g \text{ произвольно}; \quad F_0 = \text{const}. \quad (3.22)$$

Доказательство. 1) Теорема 2 и лемма 3.2.

2) Условие, что $d\omega = 0$ на V , в силу (3.16) эквивалентно следующему: отображение

$$V \ni z \mapsto (h_1, \dots, h_{l-1}; g_1, \dots, g_{l-1}) \in Z(l-1) \quad (3.23)$$

переводит V в многообразие $Z(l-1)$, удовлетворяющее условию $\sum_j dh_j \wedge dg_j = 0$. Следовательно, $\dim B \leq l-1$. Для того чтобы $\dim V = l$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

(i) $\dim B = l-1$, т. е. B было лагранжевым многообразием.

(ii) Отображение (3.23) переводило в каждую точку B некоторую характеристическую кривую многообразия V .

3) Лемма 3.1, в которой объекты $Z, x, p, V, d\varphi_R = \langle p, dx \rangle$, связанные с V , заменены соответственно через $Z(l-1), x',$

p' (см. (3.18)), $B, dF_0 = \sum_{j=1}^{l-1} g_j d\eta_j$ на B .

После такой замены формула (3.16) дает

$$\omega = dg_0 + dF_0 \text{ на } V. \text{ Но } \omega = d\psi, \text{ ч. и т. д.}$$

В п. 4 будет применяться

Определение 3.2. Если задано лагранжево многообразие $V \subset W$, назовем *инвариантной мерой* на V всякую регулярную меру η на V , инвариантную относительно характеристического вектора W , который был обозначен κ . Другими словами, инвариантная мера — это дифференциальная форма степени l на V , такая, что ее производная Ли [6] по направлению κ равна нулю:

$$\mathcal{L}_\kappa \eta = 0, \quad (3.24)$$

так как по определению

$$\mathcal{L}_\kappa \eta = i_\kappa d\eta + d(i_\kappa \eta) \text{ и } d\eta = 0,$$

то по определению η — такая мера, что

$$d(i_\kappa \eta) = 0. \quad (3.25)$$

Теорема 3.2. 1) Введем снова на $V \setminus \Sigma_R$ локальные координаты $x = R_x z$; условие, что мера на V

$$\eta(z, dz) = \chi_R(x) d^l x \quad (\chi_R: V \setminus \Sigma_R \rightarrow \mathbf{R}) \quad (3.26)$$

инвариантна, имеет вид

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \chi_R H_{R,p}(x, \varphi_{R,x}) \right\rangle = 0. \quad (3.27)$$

В силу (3.10) это означает, что вдоль характеристик, порождающих V ,

$$\frac{d\chi_R}{dt} + \sum_j \frac{\partial H_{R,p_j}(x, \varphi_{R,x})}{\partial x^j} \chi_R = 0, \quad (3.28)$$

т. е. более подробно:

$$\begin{aligned} & \frac{d\chi_R}{dt} + \\ & + \left[\sum_{j=1}^l H_{R,x^j p_j}(x, p) + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l H_{R,p_j p_k}(x, p) \varphi_{R,x^j x^k} \right]_{p=\varphi_{R,x}} \chi_R = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

2) Условие того, что в локальных координатах (3.17) на V мера

$$\eta = \tau(t, h, g) dt \wedge d^{l-1} h \wedge d^{l-1} g \quad (\tau: V \rightarrow \mathbf{R}) \quad (3.30)$$

инвариантна, состоит в том, что

$$\text{функция } \tau \text{ не зависит от } t. \quad (3.31)$$

Доказательство. 1) В выбранных координатах компоненты κ таковы:

$$dx = H_{R,p}(x, \varphi_{R,x}),$$

так что формула (3.27) выражает условие (3.25).

2) С другой стороны, в выбранных координатах компоненты $\mathbf{x}$ таковы:

$$(dt, dh, dg) = (1, 0, 0),$$

так что условие (3.31) дает (3.25)

4. Вычисление значения aU

Напишем в явном виде определение лагранжева оператора, т. е. формулу (6.6) § 1.

Обозначения 4. Пусть a — лагранжев оператор, ассоциированный с формальной функцией

$$a^0(\mathbf{v}, \cdot) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} a_r^0(\cdot),$$

определенной на $\Omega \subset Z$. Пусть W — гиперповерхность в Ω с уравнением

$$W: H(z) = 0, \quad H_z \neq 0.$$

Пусть V — лагранжево многообразие в W ; φ_R — фаза этого многообразия в репере R ; α — бесконечно дифференцируемая функция

$$\alpha: V \setminus \Sigma_R \rightarrow \mathbb{C};$$

$x = R_x z$ мы будем принимать за локальные координаты на $V \setminus \Sigma_R$.

Исключим случай, когда оператор $a = 0$ на W . В силу (6.6) это случай, когда $a^0(\mathbf{v}, x, p)$ и все производные этой функции равны нулю на W .

Пусть $\eta = \chi_R d^l x$ — положительная инвариантная мера на V (п. 3).

Теорема 4. 1) *Имеет место формула*

$$a_R^+ \left(\mathbf{v}, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) [\alpha(x) e^{v\varphi_R(x)}] = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} e^{v\varphi_R(x)} L_r \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha(x), \quad (4.1)$$

где L_r — дифференциальный оператор порядка $\leq r$, зависящий от a , V и R :

$$L_0(x) = a_0^0(x, \varphi_R, x). \quad (4.2)$$

2) Если $a^0 = H$, то

$$L_0 = 0; \quad L_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha = \chi_R^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \left(\alpha \chi_R^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (4.3)$$

где $\frac{d}{dt}$ — производная вдоль характеристических кривых W (ср. (3.10)), т. е. производная Ли $\mathcal{L}_\mathbf{x}$.

3) Сделаем более общее предположение, что α_0^0 имеет нуль порядка n на W ,

$$1 \leq n \leq \infty,$$

тогда существует $m \in \mathbb{N}$, такое, что

$$1 \leq m \leq n,$$

$$L_0 = L_1 = \dots = L_{m-1} = 0,$$

$$L_m \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha(x) = \chi_R^{\frac{1}{2}} M \left(z, \frac{d}{dt} \right) \left(\alpha \chi_R^{-\frac{1}{2}} \right), \quad \text{если } m \neq \infty. \quad (4.4)$$

Дифференциальный оператор M зависит от α и W . Он не зависит от V и R , не обращается в тождественный нуль на W и имеет порядок $\leq m$. Порядок M равен m , только если $m = n$.

В общем случае $m = 1$. Если $n > 1$, то L_1 в общем случае есть умножение на функцию, отличную от нуля.

4) Если $\alpha^0 = H$ и H_R есть многочлен степени s относительно p , то, обозначая через $H_R^{(s)}$ сумму его слагаемых степени s (главную часть), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} L_r &= 0 \quad \text{для } r > s, \\ L_s(x, p) &= e^{\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} H_R^{(s)}(x, p). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Если $s = 2$, то формулы (4.3) и (4.5) дают явное выражение оператора α .

Доказательство. 1) В силу формул (6.6) и (3.6) § 1

$$\alpha_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) [\alpha(x) e^{v\varphi_R(x)}] = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} e^{v\varphi_R(x)} l_r \left(v, x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha(x), \quad (4.6)$$

где l_r есть дифференциальный оператор порядка r , который является формальной функцией от v :

$$\begin{aligned} l_r \left(v, x, \frac{\partial}{\partial x} \right) &= \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} \sum_{I, J_0, \dots, J_k} \frac{2^{-|I|}}{I! J_0! \dots J_k!} \times \\ &\times \alpha_{R, x^I p^{I+J_0+\dots+J_k}}^0 \left(v, x, \varphi_{R, x} \right) \varphi_{R, x^{J_1}} \dots \varphi_{R, x^{J_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{J_0}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где сумма $\sum_{I, J_0, \dots, J_k}$ берется по всем наборам из $k+2$ индексов $I, J_0, \dots, J_k$, удовлетворяющих условиям

$$|I| + |J_0| + \dots + |J_k| - k = r, \quad 2 \leq |J_1|, \dots, 2 \leq |J_k|. \quad (4.8)$$

Из этих условий следует, очевидно, что

$$|I| + |J_0| + k \leq r, \quad 2 \leq |J_k| \leq r + 1.$$

Из формул (4.6) и (4.7) следуют, очевидно, (4.2) и (4.1), где L_r в отличие от l_r не зависят от v .

2) Из (4.2) получаем, что $L_0 = 0$. В этом случае $L_r = l_r$. Условие (4.8) при $r = 1$ дает возможности

$$k = 0, \quad |I| = 0, \quad |J_0| = 1;$$

$$k = 0, \quad |I| = 1, \quad |J_0| = 0;$$

$$k = 1, \quad |I| = 0, \quad |J_0| = 0, \quad |J_1| = 2.$$

Следовательно,

$$L_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x}, H_{R,p}(x, \Phi_{R,x}) \right\rangle + \\ + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^l H_{R,x^i p_j}(x, p) + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l H_{R,p_j p_k}(x, p) \Phi_{R,x^i x^k} \right]_{p=\Phi_{R,x}} \alpha;$$

В силу формул (3.10) и (3.29) это дает вторую из формул (4.3).

3) Пусть $p \in \mathbf{N}$; существует функция ${}^0b^0: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$, такая, что

$$a_0^0 = {}^0b^0 \cdot H^{n_0},$$

где при $n \neq \infty$ $n_0 = n$ и ${}^0b^0$ не равно тождественно нулю на W ; если $n = \infty$, то $n_0 = k + 1$ и ${}^0b^0 \equiv 0$ на W .

Так как $a^0 \circ b^0 = a^0 b^0 \pmod{\frac{1}{v}}$ (ср. § 2 формула (1.5)), то существует лагранжев оператор c , такой, что

$$a_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) - {}^0b_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) \circ \left[H_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^{n_0} = \\ = \frac{1}{v} c_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Если c_0^0 не обращается в нуль на W , обозначим

$${}^1b^0 = c^0, \quad n_1 = 0.$$

Если $c_0^0 = 0$ на W , применим к c рассуждение, которое было только что применено к a .

Будем продолжать этот процесс рекуррентно.

Мы получим разложение типа Де Пари [7]:

$$a_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{j=0}^h \frac{1}{v^j} {}^j b_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) \circ \left[H_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^{n_j} \left(\text{mod } \frac{1}{v^{k+1}} \right),$$

где $h \leq k$; $n_j \geq 0$; $n_j = k + 1$, если ${}^j b^0 = 0$ на W .

В силу п. 1) этой теоремы

$$\left[H_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^{n_j} [\alpha(x) e^{v\varphi_R(x)}] = 0 \left(\text{mod } \frac{1}{v^{n_j}} \right). \quad (4.9)$$

Обозначим

$$m(k) = \inf_{j \in \{0, \dots, k\}} (j + n_j).$$

Если $m(k) > k$, мы имеем, следовательно,

$$a_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) [\alpha(x) e^{v\varphi_R(x)}] = 0 \left(\text{mod } \frac{1}{v^{k+1}} \right).$$

Мы предположим, что $a \not\equiv 0$ на W ; можно, следовательно, выбрать k так, что

$$m(k) \leq k.$$

Обозначим $m(k)$ через m и обозначим J множество j , таких, что

$$j + n_j = m.$$

В силу 1) ${}^j b_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\text{mod } \frac{1}{v} \right)$ есть умножение на ${}^j b^0$.

Разложение Де Пари дает, следовательно, в силу (4.9)

$$a_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) [\alpha(x) e^{v\varphi_R(x)}] = \sum_{j \in J} \frac{1}{v^j} {}^j b^0(z) \left[H_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^{m-j} [\alpha(x) e^{v\varphi_R(x)}] \text{ mod } \frac{1}{v^{m+1}},$$

где

$$1 \leq m \leq n.$$

J — конечное и непустое множество; $0 \in J$ тогда и только тогда, когда $m = n$,

$${}^j b^0 \text{ не равно нулю на } W.$$

В силу (4.3)₂ соотношения (4.4) имеют место, если положить

$$L_m \alpha = \sum_{j \in J} {}^j b^0(z) \chi_R^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dt} \right)^{m-j} \left(\alpha \chi_R^{-\frac{1}{2}} \right);$$

L_m не нулевой оператор; его порядок $\leq m$; этот порядок равен m тогда и только тогда, когда $m = n$.

В общем случае c_0^0 не есть нуль на W , следовательно, $n_1 = 0$, $m(k) = 1$, $m = 1$.

4) $a^0 = H$; следовательно, $l_r = L_r$. В силу формулы (4.7), где $a^0 = H$, можно дополнить условия (4.8) следующим:

$$|I| + |J_0| + \dots + |J_k| \leq s, \quad \text{т. е. } k + r \leq s.$$

Если $r > s$, оно может выполняться только при $L_r = 0$.

Если $r = s$, то $k = 0$ и (4.8) приобретает вид

$$|I| + |J_0| = s,$$

а формула (4.7) приобретает вид

$$L_s(x, p) = \sum_I \frac{2^{-|I|}}{I!} H_{R, x^I p^I}^{(s)}(x, p),$$

где суммирование ведется по всем l -индексам I , таким, что $|I| \leq s$; другими словами,

$$L_s(x, p) = \sum_{j=0}^s \frac{2^{-j}}{j!} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle^j H_R^{(s)}(x, p),$$

где $\sum_{j=0}^s$ можно заменить на $\sum_{j=0}^{\infty}$, что и дает (4.5).

5. Решение лагранжева уравнения $aU = 0$

В силу теоремы 1 решения этого уравнения определены на лагранжевых подмногообразиях V многообразия с уравнением $a_0^0 = 0$.

Обозначения 5. Предположим, что уравнение $a_0^0 = 0$ определяет *гиперповерхность* в Z . Пусть W — одна из ее регулярных частей, и пусть

$$U_R = \sum_{r \in N} \frac{1}{v^r} \alpha_{R,r} e^{v\varphi_R}$$

выражение в репере R решения U , определенного на лагранжевом многообразии $V \subset W$.

В обозначениях 4 в силу теоремы 4.1 условие, что $aU = 0$ на $V \setminus \Sigma_R$, запишется так: $\forall r \in N$

$$M\left(z, \frac{d}{dt}\right) \left[\chi_R^{-\frac{1}{2}}(x) \alpha_{R,r}(x) \right] + \chi_R^{-\frac{1}{2}} \sum_{s=1}^r L_{m+s}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \alpha_{R,r-s}(x) = 0. \quad (5.1)_r$$

Первое из этих уравнений имеет вид

$$M\left(z \frac{d}{dt}\right) \beta_0(z) = 0, \quad \text{где} \quad \beta_0(z) = \chi_R^{-\frac{1}{2}}(x) \alpha_{R,0}(x) \quad (5.1)_0$$

есть лагранжева амплитуда U . Она не зависит от R . Теорема 2.2 § 2 дополняет уравнения (5.1) условием $\chi_R^{-3r-\frac{1}{2}} \alpha_{R,r}$ — бесконечно дифференцируемая функция на $\check{\Sigma}_R$. (5.2)

Напомним, что $\chi_R^{-1} = 0$ на Σ_R .

Замечание 5.1. Если кратность, с которой a_0^0 обращается в нуль на W , есть $n > 1$, то, вообще говоря, оператор M есть умножение на функцию, не равную нулю: $M: W \rightarrow \mathbb{C}$. Из уравнений (5.1) следует тогда, что носитель U есть лагранжево подмногообразие многообразия в Z с уравнениями

$$H(z) = M(z) = 0.$$

Изучение этого случая требует, чтобы содержание п. 3 и 4 было обобщено: нужно построить лагранжевы подмногообразия V данного многообразия $W \subset Z$, когда коразмерность $W > 1$, т. е. дать явное выражение aU , когда U определено на таком многообразии V . Мы исключаем этот случай и не будем заниматься его изучением.

Покажем, как условия (5.1) и (5.2) дают возможность решить уравнение $aU = 0$, применяя один-единственный репер R .

Лемма 5. Пусть K — дуга характеристики, порождающей V . Предположим, что старший коэффициент M не равен нулю на K .

1) Пусть $z' \in K$; пусть, далее, U' — решение лагранжева уравнения $aU' = 0$, определенное на V в окрестности z' . Тогда существует окрестность K в V , для которой уравнение $aU = 0$ имеет единственное решение U , такое, что $U = U'$ в окрестности z' .

2) Пусть R репер, такой, что Σ_R трансверсально K и что χ_R^{-1} не имеет нуля бесконечной кратности на $K \cap \Sigma_R$. Для того чтобы U_R было в окрестности K выражением в репере R лагранжева решения U уравнения $aU = 0$, необходимо и достаточно, чтобы U_R удовлетворяло условиям (5.1) и (5.2).

Доказательство. Обозначения: V_K — окрестность K в V типа $V_K = B \times I$ (B — шар $|b| \leq 1$ пространства $\mathbb{R}^{l-1}$, I — сегмент $|t| \leq \text{const} \in \mathbb{R}$). Кривые $b \times I$ — характеристики.

$0 \times I$ есть заданная характеристика K ; $z' = (0, 0) \bigcup_j I_j = I$ — конечное покрытие I ; $V_j = B \times I_j$.

Доказательство. 1) Выберем V_K и V_j , обладающие следующими свойствами: U' определено на V_0 . Каждому множеству V_j соответствует репер R_j , такой, что $V_j \cap \Sigma_{R_j} = \emptyset$. I_j — сегмент $j-1 \leq t \leq j+1$. Если U определено на $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{j-1}$ ($j > 0$), то применение (5.1) в репере R_j позволяет продолжить на V_j последовательно определение $\alpha_{R_j,0}, \dots, \alpha_{R_j,r}, \dots, U_{R_j}, U$. Эти продолжения определяются единственным образом.

2) Выражение U_R лагранжевой функции U , определенное в окрестности K , удовлетворяет (5.1) и (5.2). Докажем обратное. Предположим, что репер R , окрестность $V_K \supset K$ и формальная функция

$$U_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} \alpha_{R,r} e^{vp_R}, \quad (5.3)$$

определенная на $V_K \setminus \Sigma_R \cap V_K$, удовлетворяют (5.1) и (5.2). Нужно доказать, что U_R в окрестности K есть выражение лагранжевой функции в репере R .

Пусть $z' \in K$; в силу 1) существует единственная лагранжева функция U , определенная в окрестности K , выражение которой в R совпадает с U_R в окрестности z' . Нужно доказать, что выражение U в репере R есть U_R в окрестности K .

Так как это выражение должно удовлетворять условиям (5.1) и (5.2), то достаточно доказать следующую теорему единственности. Если формальная функция (5.3) равна нулю в окрестности некоторой точки K , то она равна нулю в окрестности K .

Выберем V_K и V_j со следующими свойствами: $U_R = 0$ на V_0 ; I_j есть сегмент: $j-1 \leq t \leq j$; $V_K \cap \Sigma_R = \bigcup_j B_j$, где $B_j = V_j \cap V_{j+1} = B \times j$. Предположим, что доказано следующее:

$$U_R = 0 \quad \text{на} \quad V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup (V_j \setminus B_j) \quad (j > 0).$$

В силу (5.2) $\chi_R^{-\frac{1}{2}} \alpha_{R,r}$ имеет на B_j производные любого порядка, равные нулю. (5.1) дает тогда последовательно $\alpha_{R,0} = 0, \alpha_{R,1} = 0, \dots, \alpha_{R,r} = 0, \dots, U_R = 0$ на $V_{j+1} \setminus B_{j+1}$, ч. и т. д.

Из доказанной леммы следует, что дифференциальные операторы M и L_r обладают весьма специальными свойствами. Укажем следующее следствие утверждения 2) этой леммы.

Теорема 5. Пусть W гиперповерхность в Z , на которой $a_0^0 = 0$; предположим, что оператор a не нулевой и старший коэффициент M не обращается в нуль; V — лагранжево многообразие в W ; R — репер. Пусть, далее, $\eta = \chi_R d^1 x$ — инвариантная положительная мера на V . Предположим, что χ_R^{-1} не имеет на Σ_R нуля бесконечной кратности. И наконец, предположим, что Σ_R трансверсально к характеристикам W , порождающим V . Тогда для того, чтобы

$$\check{U}_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} \alpha_{R,r} e^{v\varphi_R}$$

было выражением в R лагранжева решения $\check{U}$ уравнения $a\check{U} = 0$, определенного на универсальном накрытии $\check{V}$ многообразия V , необходимо и достаточно, чтобы $\check{U}_R$ удовлетворяла (5.1) и (5.2).

Замечание 5.2. Лемма 5 и теорема 5 применяются, очевидно, к решениям $\check{U}$, определенным $\text{mod } \frac{1}{v^s}$ на $\check{V}$, уравнения

$$a\check{U} = 0 \quad \text{mod } \frac{1}{v^{m+s}} \quad (s \in \mathbb{N}).$$

6. Решения лагранжева уравнения

$$aU = 0 \quad \left(\text{mod } \frac{1}{v^2} \right)$$

с положительной амплитудой;
квантование Маслова

Определение 6.1. Назовем гамильтонианом всякую бесконечно дифференцируемую функцию

$$H: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (\Omega \text{ — открытое множество в } Z),$$

такую, что $H_z \neq 0$ на поверхности W с уравнением

$$W: H(z) = 0.$$

Известно, что в классической механике система уравнений Гамильтона (3.7) управляет движением частиц и, более общо, движением голономных систем.

Пусть a — лагранжев оператор, ассоциированный с гамильтонианом H . Этот оператор, следовательно, самосопряжен (§ 1, п. 6); решение уравнения

$$a\check{U} = 0 \quad \left(\text{mod } \frac{1}{v^2} \right)$$

представляет собой отыскание лагранжевых многообразий $\subset W$, обладающих инвариантной мерой, которую мы предположим > 0 ,

Действительно, уравнение $(5.1)_0$ в силу (4.3) запишется так:

$$\frac{d\beta_0}{dt} = 0$$

и означает поэтому следующее: лагранжева амплитуда $\tilde{U}$ постоянна на каждой из характеристик, порождающих V . Другими словами, $\beta_0\eta$ — инвариантная мера.

Мы потребуем, чтобы она была ≥ 0 ; это значит, что мы наложим на лагранжеву амплитуду β_0 решения $\tilde{U}$ условие

$$\beta_0 \geq 0. \quad (6.1)$$

(Напомним, что так обстоит дело в физике, где амплитуда должна изменяться медленнее, чем $e^{v\varphi_R}$ и не осциллировать вокруг значения 0.)

Определение (3.2) § 2 лагранжевых функций на V требует задания чисто мнимого числа v_0 , которым в гл. III будет обозначена величина

$$v_0 = \frac{i}{\hbar} \quad (\hbar > 0), \quad (6.2)$$

где $2\pi\hbar$ означает постоянную Планка в квантовой физике. Так как

$$\alpha_{R,0} = \beta_0 \left(\frac{\eta}{d^l x} \right)^{1/2}, \quad \text{где } \beta_0 \geq 0,$$

то условие, что $\tilde{U}$ — лагранжева функция на $V \pmod{\frac{1}{v}}$, сводится к следующему: функция

$$\left(\frac{\eta}{d^l x} \right)^{1/2} e^{v_0 \varphi_R}$$

определена (т. е. однозначна) на V . В силу определений $(d^l x)^{1/2}$ и $\eta^{1/2}$ (гл. I, § 3, следствие 3; гл. II, § 2, теорема 2.2) это условие состоит в следующем:

Определение 6.2. Лагранжево многообразие V удовлетворяет условию квантования Маслова, если функция

$$\frac{v_0}{2\pi i} \varphi_R - \frac{1}{4} m_R, \quad \text{где } v_0 = \frac{i}{\hbar},$$

определена по mod 1 на V . Это условие не зависит от выбора репера R .

Замечание 6. Если V — ориентируемое многообразие в евклидовом смысле, то m_R определено на $V \pmod{2}$. Условие квантования Маслова представляет собой тогда выбор для каждого периода $\frac{1}{2} \oint_{\gamma} [z, dz]$ функции ψ , т. е. для каждого

периода $\oint \langle p, dx \rangle$ фазы φ_R , одного из двух значений: 0 и $\pi\hbar \pmod{2\pi\hbar}$.

Если V — 2-ориентировано, то m_R определено на $V \pmod{4}$, и это условие требует, чтобы φ_R и ψ были определены на $V \pmod{2\pi\hbar}$. В приложениях гл. III этот случай не встретится.

Мы докажем сейчас следующую теорему:

Теорема 6. 1) Пусть a — оператор, ассоциированный с гамильтонианом H . Для того чтобы на многообразии V могло быть определено $\pmod{\frac{1}{v}}$ лагранжево решение уравнения

$$aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}} \quad (6.3)$$

с лагранжевой амплитудой ≥ 0 достаточно, чтобы V обладало следующими тремя свойствами:

(i) V — лагранжево многообразие, лежащее на гиперповерхности $W: H(z) = 0$;

(ii) на V определена инвариантная мера (относительно характеристического вектора H);

(iii) V удовлетворяет условию квантования Маслова.

2) Если задано V , обладающее этими тремя свойствами, то U определяется с точностью до постоянного множителя тогда и только тогда, когда инвариантная мера на V единственна; это значит, что каждая бесконечно дифференцируемая на V функция, постоянная на каждой из характеристик, порождающих V , постоянна на V .

Эта теорема будет использована в § 2 гл. III.

7. Решение некоторых лагранжевых систем с одной неизвестной функцией

Теоремы 7.1 и 7.2 уточняют теорему 6. Они будут использованы соответственно в § 1 и 3 гл. III.

Теорема 7.1. Пусть $a^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, l$) — лагранжевы операторы, ассоциированные с l гамильтонианами

$$H^j: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (\Omega \text{ — открытое множество в } Z),$$

независимыми друг от друга и находящимися попарно в инволюции, т. е. такими, что

$$dH^{(1)} \wedge \dots \wedge dH^{(l)} \neq 0, \quad \forall j, k \quad (d\omega)^{l-2} \wedge dH^{(j)} \wedge dH^{(k)} = 0, \quad (7.1)$$

где $\omega = \frac{1}{2} [z, dz]$. Тогда

1) Условие того, чтобы система

$$a^{(1)}U = \dots = a^{(l)}U = 0 \quad \text{mod } \frac{1}{v^2} \quad (7.2)$$

имела лагранжево решение U , определенное mod $\frac{1}{v}$ на связном многообразии V , состоит в следующем:

(i) V есть связная компонента многообразия в Z , заданного уравнениями

$$V: H^{(1)}(z) = \dots = H^{(l)}(z) = 0. \quad (7.3)$$

Это многообразие — лагранжево.

(ii) V удовлетворяет условию квантования Маслова (определение 6.2).

Если выбрать в качестве меры на V

$$\eta = \frac{d^{2l}z}{dH^{(1)} \wedge \dots \wedge dH^{(l)}} \quad (\text{ср. замечание 7}), \quad (7.4)$$

то лагранжева амплитуда U будет постоянна.

Если V выбрано, то U определяется с точностью до числового множителя mod $\frac{1}{v}$.

2) Производные Ли $\mathcal{L}_j$ вдоль характеристических векторов κ^j функций $H^{(i)}$ коммутируют одна с другой. Если V компактно, то отсюда следует, что V — тор, группа переносов которого порождается инфинитезимальными преобразованиями $\mathcal{L}_j$.

Замечание 7. Напомним, что $d^{2l}z$ определено формулой (5.15) § 1; (7.4) означает, что η есть ограничение на V произвольной формы η_z на Z , такой, что

$$dH^{(1)} \wedge \dots \wedge dH^{(l)} \wedge \eta_z = d^{2l}z;$$

η , очевидно, не зависит от выбора η_z и инвариантна относительно каждого κ^j .

Доказательство. 1) Согласно теореме 1, носитель U принадлежит одной из связных компонент V многообразия с уравнениями (7.3).

Обратно, пусть V одна из этих компонент. Ранг $d\omega$ равен $2l$, потому что характеристическая система для $d\omega$ имеет вид $dz = 0$. В силу теоремы 2 (Э. Картан) локально определены функции $g_0, \dots, g_l$, такие, что

$$\omega = dg_0 + \sum_{j=1}^l g_j dH^{(j)}.$$

Ограничение ω_V формы ω на многообразии V удовлетворяет, следовательно, условию

$$d\omega_V = 0.$$

Так как $\dim V = l$, то V — лагранжево многообразие.

Этот результат мог бы также быть получен из теоремы 3.1, 3) (3.22).

Пусть R репер в Z ; $R_z = (x, p)$. Условие того, что $H^{(j)}$ и $H^{(k)}$ находятся в инволюции, имеет тогда вид

$$\left\langle \frac{\partial H^{(j)}}{\partial x}, \frac{\partial H^{(k)}}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H^{(k)}}{\partial x}, \frac{\partial H^{(j)}}{\partial p} \right\rangle = 0,$$

т. е.

$$\mathcal{L}_{\kappa^j} H^{(k)} = 0, \quad (7.5)$$

где через $\mathcal{L}_{\kappa^j}$ обозначена производная по направлению характеристического вектора $H^{(j)}$:

$$\kappa^{(j)} = \left(\frac{\partial H^{(j)}}{\partial p}, -\frac{\partial H^{(j)}}{\partial x} \right).$$

Из (7.5) следует

$$\mathcal{L}_{\kappa^{(j)}} dH^{(k)} = 0.$$

С другой стороны, определение производной Ли дает

$$\mathcal{L}_{\kappa^j} d^{2l}z = 0,$$

откуда в силу определения (7.4) меры η

$$\mathcal{L}_{\kappa^j} \eta = 0.$$

В силу теоремы 4, 2) условие того, чтобы лагранжева функция $\check{U}$, определенная на $\check{V}$, удовлетворяла уравнениям

$$a^1 \check{U} = \dots = a^{(l)} \check{U} = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}},$$

состоит в том, чтобы для ее лагранжевой амплитуды β_0 выполнялись условия

$$\forall j \quad \mathcal{L}_{\kappa^j} \beta_0 = 0.$$

Так как $H^{(j)}$ независимы, т. е. удовлетворяют условию (7.1)₁, то это значит, что

β_0 постоянна на V .

Условие того, чтобы функция $\check{U}$ была по $\text{mod } 1/v$ лагранжева на V , в силу п. 6 эквивалентно условию квантования Маслова.

2) В силу § 2 (1.1) коммутатор $a^{(j)}$ и $a^{(k)}$

$$[a^{(j)}, a^{(k)}] = a^{(j)} \circ a^{(k)} - a_0^{(k)} a^{(j)}$$

есть оператор, ассоциированный с формальной функцией

$$-2 \left\{ \operatorname{sh} \frac{1}{2v} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'} \right] H^{(j)}(z) H^{(k)}(z') \right\}_{z=z'}.$$

Условие того, что $H^{(j)}$ и $H^{(k)}$ находятся в инволюции, состоит в том, что эта формальная функция $\equiv 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}$. Но это нечетная функция от v . Следовательно, она равна $0 \pmod{\frac{1}{v^3}}$, т. е.

$$[a^{(j)}, a^{(k)}] \equiv 0 \pmod{\frac{1}{v^3}}. \quad (7.6)$$

Но, в силу теоремы 4, 2)

$$\forall \alpha: a_R^{(j)}(\alpha e^{v\varphi_R}) = \frac{1}{v} e^{v\varphi_R} \chi_R^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_{\kappa j} \left(\alpha \chi_R^{-\frac{1}{2}} \right) \pmod{\frac{1}{v^2}}.$$

Следовательно,

$$[a_R^{(j)}, a_R^{(k)}](\alpha e^{v\varphi_R}) = \frac{1}{v^2} e^{v\varphi_R} \chi_R^{\frac{1}{2}} [\mathcal{L}_{\kappa j}, L_{\kappa k}] \left(\alpha \chi_R^{-\frac{1}{2}} \right) \pmod{\frac{1}{v^3}}.$$

Отсюда, согласно (7.6),

$$[\mathcal{L}_{\kappa j}, \mathcal{L}_{\kappa k}] = 0.$$

Если V компактно, то инфинитезимальные преобразования $\mathcal{L}_{\kappa^1}, \dots, \mathcal{L}_{\kappa^l}$ порождают, следовательно, абелеву группу гомеоморфизмов V . Отсюда 2) и теорема 7.1 доказаны. Дополним эту теорему следующей:

Теорема 7.2. Пусть l лагранжевых операторов $a^{(j)}$ ($j = 1, \dots, l$) коммутируют друг с другом и равны $\pmod{\frac{1}{v^2}}$ операторам, ассоциированным с гамильтонианами $H^{(j)}$, независимыми и находящимися попарно в инволюции (т. е. удовлетворяющим условиям (7.1)). Поставим задачу: определить на связном многообразии V , $\pmod{\frac{1}{v^r+1}}$ лагранжево решение U системы

$$a^{(1)}U = \dots = a^{(l)}U = 0 \pmod{\frac{1}{v^r+2}}. \quad (7.7)$$

Предположим, что выполнены условия (i) и (ii), необходимость которых доказана теоремой 7.1. Тогда поставленная задача имеет решение U в том и только том случае, когда выполнены дополнительно два следующих условия:

(iii) На V существует решение задачи (7.7) _{$r-1$} (мы будем предполагать его явно заданным).

(iv) Функция $\tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}$, которая определяется интегрированием формы Пфаффа, определенной и замкнутой на $V - \Sigma_R$,

и условием, что она имеет полярные особенности на Σ_R , есть функция $V \rightarrow \mathbb{C}$ (знание этой функции дает явное решение задачи).

Если выполнены условия (i), (ii), (iii) и (iv), то решение U системы (7.7)_r определено на V с точностью до множителя, представляющего собой формальное число с нулевой фазой.

Предварительные замечания к доказательству. Пусть R — репер Z . Пусть V удовлетворяет условию (i). Дадим следующую формулировку теоремы 4, 1) и 2): пусть $\beta: V \setminus \Sigma_R \rightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} a_R^{(j)} + \left(\nu, x, \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\chi_R^{1/2}(x) \beta(x) e^{\nu \varphi_R(x)} \right) = \\ = \chi_R^{1/2}(x) e^{\nu \varphi_R(x)} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} M_r^j \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \beta(x), \end{aligned} \quad (7.8)$$

где M_r^j — дифференциальный оператор порядка $\leq r$, зависящий от a^j и V ;

$$M_0^j = 0, \quad M_1^j = \mathcal{L}_{\kappa^j}.$$

Из предположения, что операторы $a^{(j)}$ коммутируют, следует, что

$$\forall r \quad \sum_{s=0}^r [M_{s+1}^j, M_{r-s+1}^k] = 0. \quad (7.9)$$

Доказательство теоремы. Пусть U — лагранжева функция, определенная на V с лагранжевой амплитудой $\beta_0 = 1$. Пусть ее выражение в репере R

$$U_R(\nu, x) = \chi_R^{1/2} e^{\nu \varphi_R(x)} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \beta_r(x), \quad \text{где } \beta_0 = 1, \beta_r: V \setminus \Sigma_R \rightarrow \mathbb{C}.$$

Предположим, что U задано $\text{mod } \frac{1}{\nu^r}$ и удовлетворяет (7.7)_{r-1}. Это значит, что $\beta_0, \dots, \beta_{r-1}$ заданы и (в силу (7.8)) удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{t=1}^s M_t^j \beta_{s-t} = 0 \quad \text{для } j = 1, \dots, l, s = 1, \dots, r. \quad (7.10)$$

Условия того, что U удовлетворяет (7.7)_r, можно записать в виде

$$\forall j \quad \sum_{s=1}^{r+1} M_s^j \beta_{r+1-s} = 0. \quad (7.11)$$

Эти условия представляют собой систему l уравнений, которые определяют

$$\forall j \quad M_1^j \beta_r, \quad \text{т. е. } \forall j \quad \mathcal{L}_{\kappa^j} \beta_r, \quad \text{т. е. } d\beta_r,$$

как функцию $\beta_0, \dots, \beta_{r-1}$. Условие локальной интегрируемости этой системы, т.е. условие, чтобы задаваемое ей выражение $d\beta_r$ было замкнутой формой Пфаффа в силу коммутативности $M_1^j = \mathcal{L}_{\kappa^j}$, имеет вид

$$\forall j, k \quad M_1^j \circ \sum_{s=2}^{r+1} M_s^k \beta_{r+1-s} - M_1^k \circ \sum_{s=2}^{r+1} M_s^j \beta_{r+1-s} = 0,$$

т.е., заменяя s на $s+1$,

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^r [M_1^j, M_{s+1}^k] \beta_{r-s} + \sum_{s=1}^r [M_{s+1}^j, M_1^k] \beta_{r-s} + \\ + \sum_{s=1}^r (M_{s+1}^k \circ M_1^j - M_{s+1}^j \circ M_1^k) \beta_{r-s} = 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Но из (7.10) следует (если заменить t и s на $t+1$ и $s+1$)

$$\sum_{s=1}^r M_{s+1}^k \circ M_1^j \beta_{r-s} + \sum_{s,t} M_{s+1}^k \circ M_{t+1}^j \beta_{r-s-t} = 0,$$

где $\sum_{s,t}$ означает $\sum_{s=1}^{r-1} \sum_{t=1}^{r-s}$. Иначе говоря, эта сумма распространена на все целые значения индексов (s, t) , для которых $1 \leq s, \quad 1 \leq t, \quad s+t \leq r$.

Другими словами, из (7.10) следует, что

$$\sum_{s=1}^r M_{s+1}^k \circ M_1^j \beta_{r-s} + \sum_{s=2}^r \sum_{t=1}^{s-1} M_{s-t+1}^k \circ M_{t+1}^j \beta_{r-s} = 0,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{s=1}^r M_{s+1}^j \circ M_1^k \beta_{r-s} + \sum_{s=2}^r \sum_{t=1}^{s-1} M_{t+1}^j \circ M_{s-t+1}^k \beta_{r-s} = 0.$$

Локальное условие интегрируемости (7.12) можно, следовательно, записать в виде

$$\sum_{s=1}^r \sum_{t=0}^s [M_{t+1}^j, M_{s-t+1}^k] \beta_{r-s} = 0.$$

Оно, таким образом, выполнено, по предположению коммутативности (7.9).

Система (7.11) определяет, следовательно, функцию

$$\beta_r: \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \rightarrow \mathbb{C}$$

с точностью до функции, локально постоянной на $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$. При этом выборе β_r U_R есть локальное выражение в R лагранжева решения (7.7)_r на $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$.

В силу леммы 5, 1), которая справедлива по $\text{mod } \frac{1}{v^r + 2}$, существует лагранжево решение (7.7)₂ на $\check{V}$, выражение которого в R есть U_R с точностью до добавления к β_r функции, постоянной на каждой компоненте $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$. В силу теоремы 5 добавление к β_r одной из таких функций делает функцию $\chi_R^{-3r} \beta_r$ бесконечно дифференцируемой на $\check{V}$; β_r тогда определено с точностью до добавления функции, постоянной на V , т. е. до множителя, кратного β_0 . В силу предположения (ii) удовлетворяется условие Маслова. Согласно результатам п. 6, для того чтобы U было лагранжевой функцией на $V \text{ mod } \frac{1}{v^r + 1}$, необходимо и достаточно, чтобы β_r было функцией $V \rightarrow \mathbb{C}$. Теорема доказана.

8. Лагранжевы обобщенные функции.

Решение однородной лагранжевой системы

Теорема 1 и лемма 5, 1) применимы к решениям, которые являются обобщенными лагранжевыми функциями. Условие (5.2) должно тогда быть сформулировано таким образом:

$\chi_R^{-3r - \frac{1}{2}} \alpha_{R,r}$ есть обобщенная функция в окрестности Σ_R . Не пытаясь распространить на обобщенные функции ни лемму 5, 2), ни теорему 5, заметим только, что теоремы 7.1 и 7.2 верны для обобщенных лагранжевых решений. Следовательно, справедлива

Теорема 8 (регулярность). При предположениях теоремы 7.2 всякое обобщенное лагранжево решение U системы (7.7) есть лагранжева функция по $\text{mod } \frac{1}{v^r + 1}$.

Заключение. В. П. Маслов назвал «асимптотическими» «решения, определенные по $\text{mod } \frac{1}{v}$ », изученные в п. 6 и 7.

Нет, однако, никаких причин считать их равными по $\text{mod } \frac{1}{v}$ лагранжевым решениям U уравнения $aU = 0$ (ср. теорему 7.2 и § 3 гл. III). Выражение U_R такого решения U не обязано являться асимптотическим разложением решения дифферен-

циального или псевдодифференциального уравнения, которое определяется с помощью a^R : примеры, приведенные в гл. III, демонстрируют это.

Наиболее очевидная характерная черта этого лагранжева анализа, на который автора навела книга В. П. Маслова [10], это его истинная оригинальность.

Он чисто формален. С точки зрения физики его не бессмысленно применять к ненаблюдаемым величинам квантовой теории.

§ 4. ОДНОРОДНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Дадим обобщение наиболее простых результатов § 3: теорем 4, 5, 6 и 7.1.

1. Вычисление $\sum_{m=1}^{\mu} a_n^m U_m$

Обобщим результат п. 8, дав в явном виде его доказательство; мы обобщим, таким образом, теорему 4 § 3.

Обозначения 1. Пусть $a — \mu \times \mu$ матрица, элементы которой a_n^m ($m, n = 1, \dots, \mu$) — лагранжевы операторы, ассоциированные с формальными функциями с нулевой фазой. Эти функции есть элементы матрицы

$$a^0 = \sum_{r \in N} \frac{1}{v^r} a_r^0, \text{ где } a_r^0: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{\mu^2}.$$

Пусть W — гиперповерхность в Ω с уравнением

$$W: H(z) = 0, \text{ где } H_z \neq 0 \text{ на } W.$$

Пусть, далее, V — лагранжево многообразие в W ; φ_R — его фаза в репере R ; обозначим

$$b(x, p) = a_0^0(z); \quad c(x, p) = a_1^0(z), \text{ где } (x, p) = Rz. \quad (1.1)$$

Обозначим через $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\mu)$ вектор, компоненты которого бесконечно дифференцируемые функции

$$\alpha_m: V \setminus \Sigma_R \rightarrow \mathbb{C}.$$

Примем x за локальные координаты на $V \setminus \Sigma_R$. Через $\eta = \chi_R d^l x$ обозначим, как и выше, инвариантную меру на V (§ 3, п. 3).

Теорема 1. 1) Справедливо равенство

$$a_R^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) [\alpha(x) e^{v\varphi_R(x)}] = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} e^{v\varphi_R(x)} L_r \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha(x), \quad (1.2)$$

где L_r — $\mu \times \mu$ матрица, элементы которой — дифференциальные операторы порядка $\leq r$, зависящие от V , a и R .

$$L_0(x) = b(x, \varphi_R, x). \quad (1.3)$$

2) Предположим, что $\det b = H$. Существуют два ненулевых μ -вектора f и g , зависящих от $z \in Z$ и таких, что на W

$$bf = 0, \quad {}^tbg = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{m=1}^{\mu} b_n^m f_m = 0, \quad \sum_{n=1}^{\mu} g^n b_n^m = 0. \quad (1.4)$$

Выберем их (что возможно) такими, чтобы на W произведение $f_m g^n$ было минором b_n^m матрицы b , т. е. чтобы выполнялось условие

$$dH = \sum_{m,n} f_m g^n db_n^m \pmod{H}. \quad (1.5)$$

Обозначим

$$\langle g, u \rangle = \sum_{n=1}^{\mu} g^n u_n \quad \text{для любого вектора } u = (u_1, \dots, u_{\mu}).$$

Очевидно, в силу (1.3) и (1.4)

$$\langle g(x, \varphi_R, x), L_0(x) \alpha(x) \rangle = 0. \quad (1.6)$$

Эту формулу можно дополнить следующей, где γ — произвольная функция $V \setminus \Sigma_R \rightarrow \mathbb{C}$ и где $\frac{d}{dt}$ есть дифференцирование вдоль характеристических кривых W , т. е. производная Ли $\mathcal{L}_\chi$:

$$\begin{aligned} \left\langle g(x, \varphi_R, x), L_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) [\gamma(x) f(x, \varphi_R, x)] \right\rangle = \\ = \chi_R^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \left(\gamma \chi_R^{-\frac{1}{2}} \right) + J(x, \varphi_R, x) \gamma(x). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $J(x, p)$ определено на W формулой

$$J = \frac{1}{2} \sum_{m,n} [(g^n, b_n^m) f_m + b_n^m (g^n, f_m) + g^n (b_n^m, f_m)] + \sum_{m,n} g^n c_n^m f_m, \quad (1.8)$$

в которой через $(\cdot, \cdot)$ обозначается скобка Пуассона (см. формулу (3.14) § 3).

Укажем на свойства J , которые, кроме первого, очевидны.

Замечание 1.1. J зависит только от b , c и ограничений f_W и g_W функций f и g на W .

Замечание 1.2. При умножении f на $h: Z \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ g_W умножается на h^{-1} и к J добавляется $\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$.

Замечание 1.3. Если матрица b симметрична и матрица c кососимметрична, то J равно нулю, так как можно выбрать $\bar{f} = g$.

Замечание 1.4. Предположим, что матрицы b и ic самосопряженные. Это будет иметь место, в частности, тогда, когда матрица a самосопряженная, т. е. когда

$$\forall m, n \quad a_n^m = (a_m^n)^*.$$

Тогда значения J чисто мнимы, потому что можно выбрать $g = \bar{f}$.

Доказательство теоремы. Утверждение 1) следует из теоремы 4 § 3. Чтобы доказать 2), обозначим

$$a = a_R, \varphi = \varphi_R(x), b_n^m = b_n^m(x, \varphi_x) \quad b_{nx}^m = \frac{\partial b_n^m(x, p)}{\partial x} \Big|_{p=\varphi_x}, \dots, g_p^n = \frac{\partial g^n(x, p)}{\partial p} \Big|_{p=\varphi_x}$$

таким образом, чтобы, обозначая x^i и p^j координаты x и p , мы имели ($i, j = 1, \dots, l$)

$$\frac{\partial b_n^m}{\partial x^i} = b_{nx^i}^m + \sum_{j=1}^l b_{np_j}^m \varphi_{x^i x^j}, \dots, \frac{\partial g^n}{\partial x^i} = g_{x^i}^n + \sum_{j=1}^l g_{p_j}^n \varphi_{x^i x^j}. \quad (1.9)$$

В силу определений (6.3) — (6.6) § 1 для a^+

$$\begin{aligned} a_n^{+m} \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) [\alpha_m e^{v\varphi}] &= e^{v\varphi} b_n^m(x, \varphi_x) \alpha_m + \\ &+ \frac{e^{v\varphi}}{v} \left[\sum_j b_{np_j}^m \frac{\partial \alpha_m}{\partial x^j} + \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{np_i p_j}^m \varphi_{x^i x^j} + \frac{1}{2} \sum_j b_{nx^j p_j}^m + c_n^m \right) \alpha_m \right] \\ &\quad \left(\text{mod } \frac{1}{v^2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (1.9) и определения (1.2) для L_1

$$\left\langle g, L_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha \right\rangle = \sum_{j, m, n} g^n b_{np_j}^m \frac{\partial \alpha_m}{\partial x^j} + \sum_{m, n} g^n \left(\frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} b_{np_j}^m + c_n^m \right) \alpha_m.$$

Полагая $\alpha_m = \gamma f_m$, в силу (1.5) имеем

$$\langle g, L_1(\gamma f) \rangle = \sum_j H_{p_j} \frac{\partial \gamma}{\partial x^j} + \\ + \left[\frac{1}{2} \sum_{j, m, n} g^n b_{np_j}^m \frac{\partial f_m}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \sum_{j, m, n} g^n \frac{\partial}{\partial x^j} (b_{np_j}^m f_m) + \sum_{m, n} g^n c_n^m f_m \right] \gamma.$$

Следовательно, в силу (1.5) и определения $\frac{d}{dt}$ на W

$$\langle g, L_1(\gamma f) \rangle = \frac{d\gamma}{dt} + \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} H_{p_j} \right) \gamma + J\gamma, \quad (1.10)$$

где

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j, m, n} g^n b_{np_j}^m \frac{\partial f_m}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \sum_{j, m, n} \frac{\partial g^n}{\partial x^j} b_{np_j}^m f_m + \sum_{m, n} g^n c_n^m f_m. \quad (1.11)$$

Но, в силу формулы (3.28) § 3

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} (H_{p_j}) = - \frac{1}{\chi_R} \frac{d\chi_R}{dt}$$

и (1.10), следовательно, эквивалентно (1.7). С другой стороны, из (1.4) видно, что

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_n g^n b_n^m \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_m b_n^m f_m \right) = 0,$$

и (1.11) можно поэтому написать в виде

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j, m, n} \begin{vmatrix} f_m & -b_n^m & g^n \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^j} & \frac{\partial b_n^m}{\partial x^j} & \frac{\partial g^n}{\partial x^j} \\ f_{mp_j} & b_{np_j}^m & g_{p_j}^n \end{vmatrix} + \sum_{m, n} g^n c_n^m f_m,$$

т. е. в силу (1.9)

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j, m, n} \begin{vmatrix} f_m & -b_n^m & g^n \\ f_{mx^j} & b_{nx^j}^m & g_{x^j}^n \\ f_{mp_j} & b_{np_j}^m & g_{p_j}^n \end{vmatrix} + \sum_{m, n} g^n c_n^m f_m, \quad (1.12)$$

потому что

$$\sum_{i, j, m, n} \begin{vmatrix} f_m & -b_n^m & g^n \\ f_{mp_i} & b_{np_i}^m & g_{p_i}^n \\ f_{mp_j} & b_{np_j}^m & g_{p_j}^n \end{vmatrix} \varphi_{x^i x^j} = 0, \text{ так как этот определитель — кососимметрическая функция } (i, j).$$

Но (1.12) эквивалентно, очевидно, (1.8), что и доказывает 2).

Доказательство замечания 1.1. Формула (1.8) может быть написана в виде

$$J = \frac{1}{2} \sum_{m,n} [(g^n, b_n^m f_m) + g^n (b_n^m, f_m)] + \sum_{m,n} g^n c_n^m f_m.$$

Но, в силу (1.4) существуют регулярные функции F_n такие, что

$$\sum_m b_n^m f_m = H F_n.$$

Поэтому на W , где $H = 0$:

$$J = -\frac{1}{2} \left[\sum_n F_n \frac{dg^n}{dt} + \sum_{m,n} g^n (b_n^m, f_m) \right] + \sum_{m,n} g^n b_n^m f_m.$$

Следовательно, J зависит только от b, c, f и ограничения g на W .

2. Решение лагранжевой системы $aU = 0$ в случае, когда $\det a_0^0$ имеет только простые нули

В этом случае легко получить обобщение п. 5 § 3.

Обозначения 2. Сохраним обозначения 1. В силу теоремы 1, 1) решения системы

$$\sum_{m=1}^{\mu} a_n^m U_m = 0 \quad (2.1)$$

определены на лагранжевом многообразии V гиперповерхности W с уравнением

$$W: H = 0, \text{ где } H = \det b \quad (2.2)$$

(согласно предположению $H_z \neq 0$ на W).

Пусть

$$U_R = \sum_{r \in N} \frac{1}{v^r} \alpha_{R,r} e^{v\varphi_R}$$

— выражение в репере R решения

$$U = (U_1, \dots, U_\mu)$$

системы (2.1), которую мы запишем в виде

$$aU = 0,$$

U_m — лагранжевы функции, определенные на $V \subset W$; $\alpha_{R,r}$ функции: $V \setminus \Sigma_R \rightarrow \mathbb{C}^\mu$. Согласно теореме 1 условие $aU = 0$ на $V \setminus \Sigma_R$ можно записать так:

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad L_0(x) \alpha_{R,r}(x) + \sum_{s=1}^r L_s \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha_{R,r-s}(x) = 0. \quad (2.3)_r$$

В силу (1.6) отсюда следует, что

$$\left\langle g(x, \varphi_{R,x}), \sum_{s=1}^r L_s \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha_{R,r-s}(x) \right\rangle = 0. \quad (2.4)_r$$

Обозначим через M_0 одну из матриц $V \rightarrow \mathbb{C}^{\mu \times \mu}$ таких, что равенство

$$L_0(x) \alpha(x) = \alpha'(x), \text{ где } \langle g(x, \varphi_{R,x}), \alpha'(x) \rangle = 0, [\alpha(x), \alpha'(x) \in \mathbb{C}^\mu]$$

эквивалентно существованию $\gamma: V \setminus \Sigma_R \rightarrow \mathbb{C}$, такой, что

$$\alpha(x) + \gamma(x) f(x, \varphi_{R,x}) = M_0(x) \alpha'(x).$$

При выполнении условия (2.4)_r уравнение (2.3)_r может быть записано в виде

$$\alpha_{R,r}(x) + \gamma_{R,r}(x) f(x, \varphi_{R,x}) + \sum_{s=1}^r M_0(x) L_s \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha_{R,r-s}(x) = 0 \quad (2.5)_r$$

и в силу (1.7) уравнение (2.4)_{r+1} запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\gamma_{R,r} \chi_R^{-\frac{1}{2}} \right) + J \gamma_{R,r} \chi_R^{-\frac{1}{2}} + \\ & + \left\langle g(x, \varphi_{R,x}), \sum_{s=1}^r N_{s+1} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha_{R,r-s}(x) \right\rangle \chi_R^{-\frac{1}{2}} = 0, \end{aligned} \quad (2.6)_r$$

$$\text{где} \quad N_{s+1} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha = L_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[M_0(x) L_s \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha \right] - \\ - L_{s+1} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \alpha.$$

Теорема 2.2 § 2 следующим образом дополняет уравнения (2.5)_r и (2.6)_r:

$$\alpha_{R,r} \chi_R^{-3r-\frac{1}{2}} \text{ и, следовательно, } \gamma_{R,r} \chi_R^{-3r-\frac{1}{2}} \text{ бесконечно-дифференцируемы на } \tilde{\Sigma}_R, \quad (2.7)_r$$

Напомним, что $\chi_R^{-1} = 0$ на Σ_R .

Лемма 5 § 3 также легко обобщается. Она утверждает, что условия $(2.5)_r$, $(2.6)_r$ и $(2.7)_r$ позволяют дать решение системы $aU = 0$, использующее один-единственный репер R . Более точно (ср. § 3, теоремы 5 и 6), имеет место

Теорема 2.1. Пусть V — лагранжево многообразие, лежащее в гиперповерхности W , с уравнением (2.2); $\tilde{V}$ — универсальное накрытие V , R — репер. Пусть, далее, $\eta = \chi_R d^1 x > 0$ — инвариантная мера на V ; мы предположим, что χ_R^{-1} не обращается на Σ_R в нуль с бесконечной кратностью. Предположим, что Σ_R трансверсальна характеристикам W , которые порождают V . Тогда, для того чтобы

$$U_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} \alpha_{R,r} e^{v\varphi_R}$$

было выражением в R лагранжева решения $U = (U_1, \dots, U_\mu)$, определенного на $\tilde{V}$ (или на V) системы $aU = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall r \in \mathbb{N}$ векторы $\alpha_{R,r}: \tilde{V} \setminus \tilde{\Sigma}_R \rightarrow \mathbb{C}^\mu$ и функции $\gamma_{R,r}: \tilde{V} \setminus \tilde{\Sigma}_R \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяли условиям $(2.5)_r$, $(2.6)_r$, $(2.7)_r$ (и чтобы $\gamma_{R,r} e^{v_0\varphi_R}: V \setminus \tilde{\Sigma}_R \rightarrow \mathbb{C}$).

Замечание 2. Эта теорема применима к решениям системы $aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^{s+1}}}$. Они определены по $\pmod{\frac{1}{v^{s+1}}}$ с точностью до прибавления $\frac{\alpha}{v^s} f e^{v\varphi_R}$, где $\alpha e^{v_0\varphi_R}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}^\mu$ (или $V \rightarrow \mathbb{C}^\mu$).

Очевидно имеет место

Теорема 2.2 (редукция по $\pmod{\frac{1}{v^2}}$ системы к одному уравнению). Предположим выполненными условия теоремы 1, 2), которые определяют H и J . Существование на $V \subset W$ (или на $\tilde{V}$) решения лагранжевой системы

$$aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}, \text{ т. е. } \sum_m a_n^m U_m = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}, \quad (2.1)_2$$

эквивалентно существованию на V (или на $\tilde{V}$) решения лагранжева уравнения

$$a'U' = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}, \quad (2.8)$$

где a' — лагранжев оператор, ассоциированный с формальной функцией

$$H + \frac{1}{v} J$$

Всякому решению U системы $(2.1)_2$ отвечает решение U' уравнения (2.8), такое, что

$$U = U'f \pmod{\frac{1}{v}}.$$

В гл. IV для частного случая уравнения Дирака будет применяться теорема о редукции, аналогичная этой.

3. Частный случай лагранжевой системы $aU = 0$, для которой $\det a_0^0$ имеет кратные нули

В главе IV будет применяться следующее обобщение теоремы 7.1 § 3 (аналогичное обобщение допускает теорема 7.2 § 3).

Теорема 3. Пусть $a^{(k)}$ ($k = 1, \dots, l$) — $\mu \times \mu$ -матрицы, элементы которых являются лагранжевыми операторами; оператор $a^{(k)}$ ассоциирован $\pmod{\frac{1}{v^2}}$ с матрицей

$$H^{(k)}E + \frac{1}{v}J^{(k)},$$

где E — единичная $\mu \times \mu$ -матрица, $H^{(k)}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ и $J^{(k)}$ $\mu \times \mu$ -матрица: $\Omega \rightarrow \mathbb{C}^{\mu^2}$. Обозначим через V многообразие, заданное уравнениями

$$V: H^{(1)}(z) = \dots = H^{(l)}(z) = 0. \quad (3.1)$$

Предположим, что $a^{(k)}$ коммутируют $\pmod{\frac{1}{v^3}}$ и что

$$dH_{(z)}^{(1)} \wedge \dots \wedge dH^{(l)}(z) \neq 0 \text{ в окрестности } V.$$

Тогда 1) гамильтонианы $H^{(k)}$ попарно находятся в инволюции; V — лагранжево многообразие; его мера

$$\eta = \frac{d^{2l}z}{dH^{(1)} \wedge \dots \wedge dH^{(l)}} \Big|_V$$

$\forall k$ инвариантна относительно характеристического вектора $\kappa^{(k)}$ гамильтониана $H^{(k)}$, который касается V . Если V компактно, то V является тором, группа движений которого порождается преобразованиями $\mathcal{L}_{\kappa^{(k)}}$.

2) Пусть $U = (U_1, \dots, U_\mu)$ — вектор, компоненты которого U_m — лагранжевы функции. Для того чтобы этот вектор удовлетворял лагранжевой системе

$$\forall k \quad a^{(k)}U = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}, \quad (3.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы векторная функция U была определена на V и чтобы лагранжевы амплитуды $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\mu)$ ее компонент удовлетворяли системе уравнений в частных производных 1-го порядка

$$(H^{(k)}, \beta) + J^{(k)}\beta = 0, \quad \text{где} \quad (H^{(k)}, \beta) = \mathcal{L}_{\kappa^{(k)}}\beta \quad (3.3)$$

и где $(\cdot, \cdot)$ — скобка Пуассона (см. (3.14) § 3).

Эта система эквивалентна вполне интегрируемой системе Пфаффа

$$d\beta = \omega\beta, \quad \text{т. е.} \quad d\beta_n = \sum_m \omega_n^m \beta_m, \quad (3.4)$$

где элементы ω_n^m $\mu \times \mu$ -матрицы ω есть формы Пфаффа, определенные на V . Кроме уравнений (3.3), вектор β должен удовлетворять «условиям квантования»

$$\left(\frac{\eta}{d^l x}\right)^{\frac{1}{2}} \beta e^{v_0 \Phi_R}: V \setminus \Sigma_R \rightarrow \mathbb{C}^\mu. \quad (3.5)$$

Замечание 3. Условие полной интегрируемости системы (3.3) имеет вид

$$d\omega = \omega \wedge \omega, \quad \text{где} \quad \omega \wedge \omega \text{ есть матрица с элементами } \sum_{h=1}^{\mu} \omega_n^h \wedge \omega_h^m. \quad (3.6)$$

Это условие, следовательно, выполнено. Оно эквивалентно тому, что

$$\forall i, k \quad (H^{(i)}, J^{(k)}) - (H^{(k)}, J^{(i)}) + J^{(i)}J^{(k)} - J^{(k)}J^{(i)} = 0, \quad (3.7)$$

где $(H^{(i)}, H^{(k)}) = 0$. В произвольном репере

$$(H^{(i)}, J^{(k)}) = \sum_{j=1}^l (H_{p_j}^{(i)} J_{x^j}^{(k)} - H_{x^j}^{(i)} J_{p_j}^{(k)}).$$

Условия (3.6) и (3.7) эквивалентны коммутативности $a^{(j)} \bmod \frac{1}{v^3}$.

Доказательство. 1) Пусть U_m ($m = 1, \dots, \mu$) — лагранжевы функции, определенные на V с лагранжевыми амплитудами β_m , $U = (U_1, \dots, U_\mu)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\mu)$.

По теореме 4 § 3

$$a_R^{+(k)} \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) U = \frac{1}{v} \chi_R^{1/2} e^{v\Phi_R} L^{(k)} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \beta \left(\bmod \frac{1}{v^2} \right), \quad (3.8)$$

где $L^{(k)}$ — $\mu \times \mu$ -матрица, элементы которой дифференциальные операторы 1-го порядка. Главная часть $L^{(k)}$ есть $\mathcal{L}_{\kappa^{(k)}} E$,

где $\mathcal{L}_{\kappa^k}$ — производная Ли по направлению κ^k — характеристического вектора $H^{(k)}$, E — единичная матрица порядка $\mu \times \mu$. Согласно предположению, операторы $a^{(k)}$ коммутируют между собой по mod $\frac{1}{v^3}$, поэтому операторы $L^{(k)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ коммутируют и их главные части $\mathcal{L}_{\kappa^{(k)}}$ также коммутативны. Поэтому векторы $\kappa^{(k)}$ — касательные векторы к многообразию V с уравнениями (3.1). Отсюда утверждение 1) (ср. доказательство теоремы 7.1, 1) § 3).

2) В силу (3.8) система (3.2) эквивалентна системе

$$\forall k \quad L^{(k)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \beta = 0. \quad (3.9)$$

Так как дифференцирования $\mathcal{L}_{\kappa^{(k)}}$ коммутируют, то можно ввести на V такие локальные координаты $t_1, \dots, t_l$, что

$$\mathcal{L}_{\kappa^{(k)}} = \frac{\partial}{\partial t_k}. \quad (3.10)$$

По теореме 4 п. 3

$$L^{(k)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t_k} + J^{(k)}. \quad (3.11)$$

Система (3.9) с неизвестной $\beta: \check{V} \rightarrow \mathbb{C}^\mu$, которая должна удовлетворять (3.5), эквивалентна системе Пфаффа на $\check{V}$

$$d\beta = \omega\beta,$$

где

$$\omega = - \sum_{k=1}^l J^{(k)} dt_k \quad (3.12)$$

есть матрица порядка $\mu \times \mu$, элементы которой — пфаффовы формы. Так как операторы $a^{(k)}$ коммутируют по $\left(\text{mod } \frac{1}{v^3}\right)$, то $L^{(k)}$, определенные (3.8), также коммутируют, что в силу (3.11) может быть записано в виде

$$\frac{\partial J^{(k)}}{\partial t_i} - \frac{\partial J^{(i)}}{\partial t_k} + J^{(i)}J^{(k)} - J^{(k)}J^{(i)} = 0 \quad (3.13)$$

или в силу (3.12) в виде $d\omega = \omega \wedge \omega$.

Это условие полной интегрируемости системы (3.4). В силу (3.13) это же условие выражается формулой (3.7).

Глава III

УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И КЛЕЙНА — ГОРДОНА ДЛЯ АТОМА ЭЛЕКТРОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Введение

Резюме. Наиболее интересные задачи в теории однородных линейных уравнений с частными производными — это задачи о собственных значениях.

Их отличительная черта состоит в том, что решения существуют только в исключительных случаях. В этой главе даются примеры лагранжевых задач такого же типа.

Здесь будет предполагаться

$l = 3$; $Z(3) = X \oplus X^*$; $X = X^* = E^3$ (евклидово пространство).

Приводимые примеры связаны с лагранжевым оператором a , ассоциированным с гамильтонианом H подходящего типа: система Гамильтона, которая здесь возникает, имеет два первых интеграла, определенных на $Z(3)$: длина L и одна из составляющих M вектора $x \bigwedge p \in E^3$.

Этот гамильтониан может быть гамильтонианом нерелятивистского или релятивистского электрона при одновременном действии электрического поля фиксированного атомного ядра и постоянного магнитного поля (эффект Зеемана)¹⁾, в этом случае H зависит от параметра: уровня энергии E электрона; a — оператор Шредингера или (в релятивистском случае) Клейна — Гордона. Уровни энергии, при которых наши лагранжевы задачи имеют решение, совпадают с теми уровнями, которые возникают при классическом изучении задач, связанных с этими операторами.

Интерес лагранжевой точки зрения состоит в ее простоте. На основании теоремы 7.1 (гл. II, § 3) в § 1 этой главы уровни энергии вычисляются с помощью одной квадратуры. Квадратура в случае уравнений Шредингера и Клейна — Гордона легко осуществляется с помощью теории вычетов.

В § 1 ищутся решения, определенные по $\text{mod } \frac{1}{v}$ на компактном лагранжевом многообразии следующей лагранжевой системы:

$$aU = (a_{L^2} - \text{const})U = (a_M - \text{const})U = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}, \quad (1)$$

¹⁾ Он может быть также гамильтонианом гармонического осциллятора: см. § 3, замечания 4.3 и 4.4.

где a_{L^2} и a_M — лагранжевы операторы, ассоциированные с первыми интегралами L^2 и M . В этом параграфе применяется теорема 7.1. Уравнения имеют решения (в частности, уровни энергии), и эти решения характеризуются тремя целыми числами, которые вводятся условиями квантования Маслова:

$$l, m, n, \text{ такие, что } |m| \leq l < n.$$

Это три квантовых числа Шредингера.

Лагранжевы многообразия, на которых определены эти решения, — это *торы* $T(l, m, n)$ размерности 3 (ср. теорему 7.1, 2)) с уравнениями

$$T(l, m, n): H(x, p) = L^2(x, p) - \text{const} = M^2 - \text{const} = 0.$$

Постоянные здесь имеют те же значения, что и в (1), и зависят от (l, m, n) .

В § 2 ищутся решения лагранжева уравнения

$$aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}, \quad (2)$$

определенные по $\text{mod } \frac{1}{v}$ на компактном лагранжевом многообразии V и имеющие положительную лагранжеву амплитуду.

Речь идет, следовательно, о задаче, формально аналогичной классической задаче, связанной с уравнением Шредингера, но в нашем случае условие на поведение решения на ∞ заменено условием компактности V .

В общем случае условие существования решения остается тем же — его определяет тройка квантовых чисел; однако решение, соответствующее этой тройке, не обязательно является единственным.

В § 3 ищутся решения лагранжевой системы, определенные на компактном лагранжевом многообразии

$$aU = (a_{L^2} - \text{const})U = (a_M - \text{const})U = 0, \quad (3)$$

где постоянные — действительные формальные числа $\text{mod } \frac{1}{v^2}$, H — гамильтониан релятивистского или нерелятивистского электрона, тогда a , a_{L^2} и a_{M^2} коммутируют; применима теорема 7.2. Решения по-прежнему характеризуются тройкой целых квантовых чисел (l, m, n) . Решения задачи (1) являются решениями задачи (3) $\text{mod } \frac{1}{v}$.

В § 4 дается напоминание классической задачи, связанной с уравнениями Шредингера и Клейна — Гордона: найти функцию

$$u: E^3 \rightarrow C,$$

которая, как и ее градиент, суммируема с квадратом и которая удовлетворяет уравнению в частных производных

$$aU = 0. \quad (4)$$

В § 4 наминается решение этой задачи, чтобы показать, что оно существенно отличается от предыдущих: мы констатируем без объяснений, что все эти задачи определяют одни и те же уровни энергии.

Трудности, возникающие в § 2, и длинные вычисления § 3 и 4 контрастируют с простотой § 1. Этот § 1 оправдывает следующий

Вывод. Применение квантования Маслова (гл. II, § 3, п. 6 и 7) к атому электрона, помещенному в постоянное магнитное поле, дает наблюдаемым величинам (т. е. уровням энергии) те же значения, что волновая механика. Это квантование непосредственно приложимо к механике частиц, т. е. к первой квантовой теории. Однако оно не имеет некоторых недостатков классической теории: оно имеет логическое обоснование (гл. I и II); оно не требует определения траекторий неквантованного электрона, а только знания классических первых интегралов L и M системы Гамильтона, определяющей эти траектории.

Вероятностная интерпретация этого квантования такова: в состоянии, определенном выбором тройки целых квантовых чисел (l, m, n) , точка (x, p) с координатой x и количеством движения p принадлежит трехмерному тору $T(l, m, n)$ в 6-мерном пространстве $Z(3) = E^3 \oplus E^3$. Вероятность того, что (x, p) принадлежат определенной части $T(l, m, n)$, определена инвариантной мерой η на этом торе (ср. § 1, (3.16)).

Замечание. Пусть заданы 2 различные тройки квантовых чисел

$$(l, m, n) \neq (l', m', n').$$

Они определяют торы, пересечение которых пусто:

$$T(l, m, n) \cap T(l', m', n') = \emptyset.$$

Пусть U и U' — две лагранжевы функции, определенные соответственно на $T(l, m, n)$ и $T(l', m', n')$. Тогда, согласно гл. II, § 2, теорема 3.2, 3), их скалярное произведение равно нулю

$$(U | U') = 0.$$

Историческое замечание. В. П. Маслов не указал явно на такое применение своего метода квантования. Он изучил только случай бесконечно больших квантовых чисел, т. е. «принцип соответствия» квантовой механики.

**§ 1. ГАМИЛЬТОНИАН H , К КОТОРОМУ
ПРИМЕНИМА ТЕОРЕМА 7.1 (ГЛ. II, § 3).
УРОВНИ ЭНЕРГИИ АТОМА ЭЛЕКТРОНА
С ЭФФЕКТОМ ЗЕЕМАНА**

Теорема 7.1 гл. II, § 3 предполагает, что на $\Omega \subset Z(l)$ заданы l функций, каждая пара которых находится в инволюции. В этой главе мы предполагаем, что $l = 3$, и выбираем классическую тройку таких функций.

**1. Четыре функции, из которых все пары,
кроме одной, находятся в инволюции
на $E^3 \oplus E^3$**

Обозначим $X = X^* = E^3$ и применим результаты гл. II к случаю

$$l = 3, \quad Z(3) = E^3 \oplus E^3,$$

что означает заданность репера R_0 . Благодаря теореме 5 главы II мы можем ограничиться этим репером.

Напротив, в E^3 мы будем пользоваться не только фиксированным репером (I_1, I_2, I_3) , но также подвижным ортонормированным репером. Обозначим

$$x \in X = E^3, \quad p \in X^* = E^3.$$

Числа (x_1, x_2, x_3) и (p_1, p_2, p_3) — координаты x и p в репере (I_1, I_2, I_3) :

$$x = \sum_{j=1}^3 x_j I_j, \quad p = \sum_{j=1}^3 p_j I_j.$$

Положим по определению

$$R(x) = |x|, \quad P(p) = |p|, \quad Q(x, p) = \langle p, x \rangle, \quad L(x, p) = |x \wedge p|, \\ M(x, p) = x_1 p_2 - x_2 p_1 \quad (\text{третья компонента } x \wedge p). \quad (1.1)$$

Это пять функций от (x, p) , очевидно, удовлетворяющих условиям

$$L^2 + Q^2 = P^2 R^2; \quad |M| \leq L; \quad P \geq 0, \quad R \geq 0. \quad (1.2)$$

Вектор I_3 играет, следовательно, исключительную роль (это будет, например, направление магнитного поля, порождающего эффект Зеемана).

Характеристическая система формы $d\langle p, dx \rangle$ в $E^3 \oplus E^3$ имеет вид

$$dx = dp = 0;$$

любая функция $E^3 \oplus E^3 \rightarrow R$ есть первый интеграл этой системы. Следовательно, определена скобка Пуассона $(\cdot, \cdot)$ (определение 2, гл. II, § 3) двух таких функций. В силу формулы (3.14) (там же)

$$(L, M) = (L, Q) = (L, R) = (M, Q) = (M, R) = 0; \quad (Q, R) = R. \quad (1.3)$$

Согласно теореме 2 (Э. Картан) гл. II, § 3 с помощью квадратур на $E^3 \oplus E^3$ локально определяются четыре действительные функции

$$f_0, f_1, f_3, f_5,$$

такие, что

$$\langle p, dx \rangle = df_0 + f_1 dL + f_3 dM + f_5 dR. \quad (1.4)$$

Определим эти функции f_i . Обозначим (J_1, J_2, J_3) подвижной ортонормированный репер, определенный при $L \neq 0$, такой, что

$$x = RJ_1, \quad x \wedge p = LJ_3, \quad (1.5)$$

откуда

$$p = QR^{-1}J_1 + LR^{-1}J_2, \quad P \neq 0, \quad R \neq 0. \quad (1.6)$$

Обозначим $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ составляющие бесконечно малого сдвига относительно этого репера (Ж. Дарбу — Э. Картан). Это следующие формы Пфаффа

$$\omega_1 = \langle J_3, dJ_2 \rangle = -\langle J_2, dJ_3 \rangle, \quad \omega_2 = \langle J_1, dJ_3 \rangle, \quad \omega_3 = \langle J_2, dJ_1 \rangle,$$

такие, что

$$dJ_1 = \omega_3 J_2 - \omega_2 J_3; \quad dJ_2 = \omega_1 J_3 - \omega_3 J_1, \quad dJ_3 = \omega_2 J_1 - \omega_1 J_2. \quad (1.7)$$

Напомним, что внешнее дифференцирование этих соотношений дает уравнения (которые являются структурными уравнениями ортогональной группы)

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_1. \quad (1.8)$$

Дифференцирование (1.5)₁ дает (в силу (1.7))

$$dx = (dR)J_1 + R\omega_3 J_2 - R\omega_2 J_3, \quad (1.9)$$

откуда в силу (1.6)

$$\langle p, dx \rangle = QR^{-1}dR + L\omega_3. \quad (1.10)$$

Чтобы преобразовать эту формулу в формулу типа (1.4), введем углы Эйлера φ, ψ, ϑ . Это параметры репера (J_1, J_2, J_3) , определенные следующим образом: для $J_3 \neq \pm I_3$, т. е. для $|M| < L$, ϑ — угол I_3 и J_3 ; $0 < \vartheta < \pi$. Поворот на угол φ вокруг I_3 переводит репер (I_1, I_2, I_3) в (I'_1, I'_2, I_3) таким образом,

что

$$I'_2 \sin \vartheta = I_3 \wedge J_3.$$

Поворот на угол ϑ вокруг I'_2 переводит (I'_1, I'_2, I_3) в (I''_1, I''_2, J_3) . Наконец поворот на угол ψ вокруг J_3 переводит (I''_1, I''_2, J_3) в (J_1, J_2, J_3) .

Очевидно,

$$M = L \cos \vartheta; \quad (1.11)$$

φ и ψ определены $\text{mod } 2\pi$. Имеют место классические формулы

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= (\cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \psi) I_1 + \\ &\quad + (\sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta + \cos \varphi \sin \psi) I_2 - \cos \psi \sin \vartheta I_3; \\ J_2 &= (-\cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta - \sin \varphi \cos \psi) I_1 + \\ &\quad + (-\sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta + \cos \varphi \cos \psi) I_2 + \sin \psi \sin \vartheta I_3; \\ J_3 &= \cos \varphi \sin \vartheta I_1 + \sin \varphi \sin \vartheta I_2 + \cos \vartheta I_3; \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\cos \psi \sin \vartheta d\varphi + \sin \psi d\vartheta; \\ \omega_2 &= \sin \psi \sin \vartheta d\varphi + \cos \psi d\vartheta; \\ \omega_3 &= \cos \vartheta d\varphi + d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

В силу формулы (1.11) и третьей формулы (1.13) формула (1.10) может быть переписана в виде

$$\langle p, dx \rangle = Q \frac{dR}{R} + L d\psi + M d\varphi. \quad (1.14)$$

Эта фундаментальная формула имеет вид (1.4), что согласуется с теоремой Э. Картана, на которую мы опираемся.

Дополнительные формулы. Дифференцирование (1.6) в силу (1.7) дает

$$\begin{aligned} dp &= [d(QR^{-1}) - LR^{-1}\omega_3]J_1 + [d(LR^{-1}) + QR^{-1}\omega_3]J_2 + \\ &\quad + [LR^{-1}\omega_1 - QR^{-1}\omega_2]J_3. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Далее, в силу (1.9) из $d^3x = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ следует

$$d^3x = R^2 dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3, \quad (1.16)$$

откуда в силу (1.15)

$$d^3x \wedge d^3p = L \frac{dR}{R} \wedge dQ \wedge d \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3,$$

т. е. подставляя вместо ω_j их выражения (1.13) и исключая ϑ с помощью (1.11):

$$d^3x \wedge d^3p = dL \wedge dM \wedge dQ \wedge \frac{dR}{R} \wedge d\varphi \wedge d\psi. \quad (1.17)$$

Обозначим через Ω^6 открытую часть $Z(3) = E^3 \oplus E^3$, на которой

$$|M| < L.$$

В области Ω^6 мы можем, следовательно, принять за координаты функции

$$L, M, Q, R, \varphi, \psi,$$

где φ и ψ определены mod 2π .

Замечание 1. В Ω^6 $L \neq 0$, следовательно, в силу (1.2) $R \neq 0$, $Q \neq 0$.

Лемма 1. Пусть V — лагранжево многообразие, лежащее в Ω^6 ($\dim V = 3$). Заменим все введенные выше функции и формы их ограничениями на V .

1) Особый контур Σ_{R_0} многообразия V есть поверхность, на которой

$$\Sigma_{R_0}: dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = 0 \quad \text{на } V. \quad (1.18)$$

2) В окрестности произвольной точки Σ_{R_0} на V существует дифференциальная форма $\tilde{\omega}$ третьей степени, нигде не равная нулю, такая, что на Σ_{R_0}

$$dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \tilde{\omega} \geq 0; \quad dL \wedge dR \wedge \omega_2 / \tilde{\omega} \geq 0; \quad dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 / \tilde{\omega} \geq 0. \quad (1.19)$$

Три функции, стоящие в левой части этих неравенств, не обращаются одновременно в нуль. Существует такая константа c , что в окрестности этой точки V индекс Маслова m_{R_0} многообразия V имеет значение

$$\begin{aligned} m_{R_0} &= c, & \text{если } dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \tilde{\omega} < 0, \\ m_{R_0} &= c + 1, & \text{если } dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \tilde{\omega} > 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Доказательство. 1) Выражение (1.16) для d^3x .

2) Чтобы вычислить скачок m_{R_0} при пересечении Σ_{R_0} , применим теорему 3.2 гл. I, § 3. В силу (1.9), (1.15) и (1.18) составляющие dx и dp в репере (J_1, J_2, J_3) d_jx и d_jp удовлетворяют на V в точках Σ_{R_0} соотношениям

$$\begin{aligned} d_1p \wedge d_2x \wedge d_3x &= R^2 [d(QR^{-1}) - LR^{-1}\omega_3] \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = RdQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3, \\ d_1x \wedge d_2p \wedge d_3x &= -R dR \wedge [d(LR^{-1}) + QR^{-1}\omega_3] \wedge \omega_2 = dL \wedge dR \wedge \omega_2, \\ d_1x \wedge d_2x \wedge d_3p &= dR \wedge \omega_3 \wedge [L\omega_1 - Q\omega_2] = L dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1. \end{aligned}$$

Отсюда в силу теоремы 3.2 (гл. I, § 3) следует существование $\tilde{\omega}$, удовлетворяющей (1.19) и (1.20).

2. Выбор гамильтониана H

Пусть бесконечно дифференцируемая функция

$$H: \Omega^6 \rightarrow \mathbb{R}$$

находится в инволюции с L и M , т. е. в силу (1.14) $H(x, p)$ есть функция от L, M, Q и R :

$$H(x, p) = H[L(x, p), M(x, p), Q(x, p), R(x)]; \quad (2.1)$$

$H(\cdot)$ — бесконечно дифференцируемая функция, определенная на открытой области Ω^4 пространства $\mathbb{R}^4$ с координатами L, M, Q, R ; мы предположим, что в Ω^4

$$0 < R, \quad |M| < L, \quad (H_Q, H_R) \neq (0, 0) \quad \text{при} \quad H = 0, \quad (2.2)$$

через H_Q здесь обозначена функция $\frac{\partial H[L, M, Q, R]}{\partial Q}$.

В силу (1.3) три функции от (x, p) H, L и M находятся попарно в инволюции, что позволяет применить выражение из гл. II, § 3 для лагранжева оператора a , ассоциированного с H .

Согласно теореме 2 (Э. Картан) гл. II, § 3, с помощью квадратуры на Ω^6 локально определяются четыре действительные функции g_0, g_1, g_2, g_3 , такие, что

$$\langle p, dx \rangle = dg_0 + g_1 dL + g_2 dM + g_3 dH. \quad (2.3)$$

Мы применим эту формулу для $H = 0$, это будет сделано в следующей лемме с помощью функции Ω , определенной квадратурой (см. формулу (2.8)).

Обозначения. Пусть W — гиперповерхность, лежащая в Ω^6 с уравнением

$$W: H(x, p) = 0$$

(ср. гл. II, § 3).

Обозначим (L_0, M_0) произвольную пару действительных чисел, таких, что $|M_0| < L_0$; обозначим $V[L_0, M_0]$ связную компоненту W с уравнениями

$$V[L_0, M_0]: H(x, p) = 0, \quad L(x, p) = L_0, \quad M(x, p) = M_0. \quad (2.4)$$

W есть объединение $V[L_0, M_0]$. В силу теоремы 7.1 гл. II, § 3 $V[L_0, M_0]$ есть лагранжево многообразие. Оно является топологическим произведением двумерного тора с координатами φ и $\psi \pmod{2\pi}$ и $\Gamma[L_0, M_0]$ — связной кривой в открытой полуплоскости ($Q, R > 0$). Уравнение этой кривой имеет вид

$$\Gamma[L_0, M_0]: H[L_0, M_0, Q, R] = 0. \quad (2.5)$$

В силу третьего из условий (2.2) эта кривая не имеет особых точек.

Определим на W с точностью до слагаемого, зависящего от L и M , действительную функцию t от $[L, M, Q, R]$ условием: на $\Gamma[L, M]$

$$dt = \frac{dR}{RH_Q(L, M, Q, R)} = - \frac{dQ}{RH_R[L, M, Q, R]}. \quad (2.6)$$

Если кривая $\Gamma[L, M]$ замкнута, то функция t определена по $\text{mod } c[L, M]$, где

$$c[L, M] = \oint_{\Gamma[L, M]} \frac{dR}{RH_Q} = - \oint_{\Gamma[L, M]} \frac{dQ}{RH_R}. \quad (2.7)$$

Функция t монотонна на Γ ; (L, M, t, φ, ψ) образуют систему локальных координат на W .

Определим теперь на W с точностью до слагаемого, зависящего от L и M , другую действительную функцию Ω условием

$$d\Omega = Q \frac{dR}{R} \quad \text{на } \Gamma[L, M]. \quad (2.8)$$

Если кривая $\Gamma[L, M]$ замкнута, то Ω определена по $\text{mod } 2\pi N[L, M]$, где

$$N[L, M] = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma[L, M]} Q \frac{dR}{R} > 0. \quad (2.9)$$

Функция Ω не монотонна на Γ . Обозначим ее дифференциал

$$d\Omega[L, M, t] = Q \frac{dR}{R} + \lambda[L, M, t] dL + \mu[L, M, t] dM. \quad (2.10)$$

В § 2 будут уточнены свойства определенных этой формулой функций λ и μ .

Мы можем теперь выяснить, каково ограничение формы (2.3) на W .

Лемма 2. 1) Ограничение формы Пфаффа

$$\omega = \langle p, dx \rangle$$

на W есть

$$\omega_W = d(\Omega + L\psi + M\varphi) - (\lambda + \psi) dL - (\mu + \varphi) dM. \quad (2.11)$$

2) Характеристическая система формы $d\omega_W$ есть гамильтонова система

$$\frac{dx}{H_p(x, p)} = - \frac{dp}{H_x(x, p)}, \quad H(x, p) = 0. \quad (2.12)$$

Ее первые интегралы есть функции от

$$L, M, \lambda + \psi, \mu + \varphi. \quad (2.13)$$

Пары функций L, M и $\lambda + \psi, \mu + \varphi$ находятся в инволюции.

3) На кривых, удовлетворяющих системе (2.12), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx}{H_p(x, p)} = - \frac{dp}{H_x(x, p)} = \\ &= \frac{dR}{RH_Q[L, M, R, Q]} = \frac{d\psi}{H_L[\cdot]} = \frac{d\varphi}{H_M[\cdot]} = - \frac{dQ}{RH_R[\cdot]}; \quad dL=dM=0. \end{aligned}$$

4) На W (2.14)

$$\frac{d^3x \wedge d^3p}{dH} \Big|_W = dL \wedge dM \wedge dt \wedge d\varphi \wedge d\psi. \quad (2.15)$$

Доказательство. 1) Выражение (1.14) формы $\langle p, dx \rangle$ в Z и выражение (2.10) для QdR/R на W .

2) Из леммы 3.2 (Э. Картан) гл. II, § 3 следует, что $d\omega_W$ имеет в качестве характеристической системы систему (2.12) и имеет ранг 4. Но в силу (2.11)

$$d\omega_W = dL \wedge d(\lambda + \psi) + dM \wedge d(\mu + \varphi).$$

Следовательно (см. определение Э. Картана характеристической системы гл. II, § 3, п. 2), четыре функции (2.13) есть первые интегралы этой системы. Пары L, M и $\lambda + \psi, \mu + \varphi$ находятся в инволюции согласно замечанию 2.2 гл. II, § 3.

3) Та же лемма (Э. Картан) и выражение (1.14) для $\langle p, dx \rangle$ показывают, что $d\omega_W$ имеет характеристическую систему вида

$$\frac{dR}{RH_Q[L, M, Q, R]} = \frac{d\psi}{H_L[\cdot]} = \frac{d\varphi}{H_M[\cdot]} = - \frac{dQ}{RH_R[\cdot]} = \frac{dL}{0} = \frac{dM}{0}, \quad H=0.$$

Эта система эквивалентна (2.12).

Очевидно, что

$$\frac{dx}{H_p(x, p)} = \frac{\langle x, dx \rangle}{\langle x, H_p(x, p) \rangle} = \frac{R dR}{\langle x, L_p \rangle H_L + \langle x, M_p \rangle H_M + \langle x, Q_p \rangle H_Q}.$$

Но, так как $x \wedge (p + sx)$ не зависит от действительной переменной s и $d\langle x \wedge p \rangle = 0$ при $dx = 0$ и dp , параллельном x , то

$$\langle x, L_p \rangle = \langle x, M_p \rangle = 0;$$

с другой стороны,

$$\langle x, Q_p \rangle = R^2.$$

Из этих соотношений следует

$$\frac{dx}{H_p(x, p)} = \frac{dR}{RH_Q[L, M, Q, R]} = \frac{d\psi}{H_L} = \frac{d\varphi}{H_M} = - \frac{dQ}{RH_R}, \quad dL=dM=0,$$

т. е. из (2.6) и (2.12) следует (2.14).

4) Формула (1.17) может быть записана в виде

$$d^3x \wedge d^3p = dL \wedge dM \wedge dH \wedge \frac{dR}{RH_Q} \wedge d\varphi \wedge d\psi,$$

где в силу (2.14) при $H = 0$

$$\frac{dR}{RH_Q} = dt \pmod{(dL, dM)}.$$

Отсюда вытекает формула (2.15), смысл которой состоит в следующем:

$$\left. \frac{d^3x \wedge d^3p}{dH} \right|_W \text{ означает ограничение } \tilde{\omega}_W \text{ на } W$$

любой формы пятой степени $\tilde{\omega}$, такой, что

$$dH \wedge \tilde{\omega} = d^3x \wedge d^3p;$$

$\tilde{\omega}_W$, очевидно, не зависит от выбора $\tilde{\omega}$.

3. Квантованные торы $T(l, m, n)$

Квантованные торы $T(l, m, n)$ характеризуют решения, определенные по $\text{mod } \frac{1}{v}$, лагранжевой системы

$$aU = (a_{L^2} - L_0^2)U = (a_M - M_0)U = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}. \quad (3.1)$$

Здесь через a , a_{L^2} и a_M обозначены лагранжевы операторы, ассоциированные соответственно с находящимися в инволюции гамильтонианами

$$H, L^2, M;$$

L_0 и M_0 — две действительные постоянные, такие, что

$$|M_0| < L_0.$$

Согласно теореме 7.1 гл. II, § 3 решения этой системы есть лагранжевы функции U с постоянной лагранжевой амплитудой, определенные по $\text{mod } \frac{1}{v}$ на тех многообразиях $V[L_0, M_0]$ (компактных или некомпактных), заданных формулой (2.4), которые удовлетворяют условиям квантования Маслова (гл. II, § 3, определение 6.2); $V[L_0, M_0]$ выбраны связными; мера η_V многообразия V , инвариантная относительно характеристических векторов $H, L^2 - L_0^2, M - M_0$, которая служит для определения лагранжевой амплитуды, в силу (2.15) и формулы (7.4) гл. II, § 3 имеет вид

$$\eta_V = dt \wedge d\varphi \wedge d\psi. \quad (3.2)$$

Напомним формулировку условий квантования В. П. Маслова: функция

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \varphi_{R_0} - \frac{1}{4} m_{R_0} \quad \left(\text{где } \hbar = \frac{i}{v_0} \text{ действительно} \right) \quad (3.3)$$

однозначна на $V \pmod{1}$.

Фаза φ_{R_0} многообразия $V[L_0, M_0]$ (определенная в гл. I, § 2, п. 9; гл. I, § 3, п. 1) в силу (2.11), где $L = L_0$, $M = M_0$, есть

$$\varphi_{R_0} = \Omega + L_0\psi + M_0\varphi. \quad (3.4)$$

Вычислим индекс Маслова многообразия $V[L_0, M_0]$.

Лемма 3. 1) Особый контур Σ_{R_0} многообразия $V[L_0, M_0]$ есть объединение $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ двух поверхностей, принадлежащих $V[L_0, M_0]$, с уравнениями

$$\Sigma_1: \psi = 0 \pmod{\pi}; \quad \Sigma_2: H_Q[L, M, Q, R] = 0.$$

2) Индекс Маслова m_{R_0} многообразия $V[L_0, M_0]$ есть с точностью до целочисленного слагаемого

$$m_{R_0} = \left[\frac{1}{\pi} \psi \right] - \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{H_Q}{H_R} \right] \quad (3.5)$$

на $\check{V}[L_0, M_0]$, где [...] обозначает целую часть от

Доказательство. Применим лемму 1. На $V[L_0, M_0]$ в силу (1.11) и (1.13) мы имеем

$$\omega_1 = -\cos \psi \sin \vartheta d\varphi, \quad \omega_2 = \sin \psi \sin \vartheta d\varphi, \quad L_0\omega_3 = L_0 d\psi + M_0 d\varphi.$$

Следовательно, в силу (2.6)

$$dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = -RH_Q \sin \psi \sin \vartheta dt \wedge d\psi \wedge d\varphi, \quad (3.6)$$

$$dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = RH_R \sin \psi \sin \vartheta dt \wedge d\psi \wedge d\varphi, \quad (3.7)$$

$$dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 = -RH_Q \cos \psi \sin \vartheta dt \wedge d\psi \wedge d\varphi, \quad (3.8)$$

где $R \sin \vartheta \neq 0$ в силу первой формулы (2.2) и второй формулы (2.2).

В силу леммы 1 п. 1) уравнение Σ_{R_0} имеет вид

$$H_Q \sin \psi = 0,$$

откуда вытекает п. 1) леммы 3.

В окрестности произвольной точки $\Sigma_1 \setminus \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $H_Q \cos \psi \neq 0$; мы можем в лемме 1, 2) положить

$$\tilde{\omega} = dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1; \quad dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \tilde{\omega} = \operatorname{tg} \psi,$$

откуда в силу этой леммы

$$m_R = \left[\frac{1}{\pi} \psi \right] + \text{const.} \quad (3.9)$$

В окрестности точки $\Sigma_2 \setminus \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ $H_R \sin \psi \neq 0$ в силу (2.2)₃; мы можем в лемме 1, 2) выбрать

$$\tilde{\omega} = dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3; \quad dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \tilde{\omega} = - \frac{H_Q}{H_R},$$

откуда

$$m_R = \text{const} - \left[\frac{1}{\pi} \text{arctg} \frac{H_Q}{H_R} \right]. \quad (3.10)$$

Глобальное выражение (3.5) для m_{R_0} вытекает из двух локальных выражений (3.9) и (3.10).

Условие квантования Маслова (3.3) в силу (3.4) и (3.5) формулируется так: функция

$$\frac{1}{\hbar} \frac{\Omega}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \text{arctg} \frac{H_Q}{H_R} + \left(\frac{L_0}{\hbar} - \frac{1}{2} \right) \frac{\psi}{2\pi} + \frac{M_0}{\hbar} \frac{\varphi}{2\pi}$$

определена по mod 1 на $V[L_0, M_0]$.

Если $V[L_0, M_0]$ компактно, т. е. если кривая $\Gamma[L_0, M_0]$ замкнута, это условие в силу (2.9) формулируется так: числа

$$\frac{1}{\hbar} N[L_0, M_0] + \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\hbar} L_0 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\hbar} M_0$$

— целые. Обозначим их в соответствии с классическими обозначениями квантовой физики

$$n - l, \quad l, \quad m.$$

Так как $N > 0$ и $|M_0| < L_0$, то

$$|m| \leq l < n.$$

Если $V[L_0, M_0]$ некомпактно, это условие квантования Маслова сводится к тому, что

$$\frac{1}{\hbar} L_0 - \frac{1}{2} = l, \quad \frac{1}{\hbar} M_0 = m$$

— целые числа, такие, что $|m| \leq l$.

Выводом из этого п. 3 является, таким образом,

Теорема 3. Связные многообразия, на которых определены решения лагранжевой системы (3.1), это или

1) компактные многообразия $V[L_0, M_0]$, определенные формулой (2.4) и такие, что существуют 3 целых числа

$$l, \quad m, \quad n,$$

удовлетворяющих условиям

$$|m| \leq l < n, \quad (3.11)$$

$$L_0 = \hbar \left(l + \frac{1}{2} \right), \quad M_0 = \hbar m, \quad L_0 + N[L_0, M_0] = \hbar n; \quad (3.12)$$

$V[L_0, M_0]$ является в этом случае тором, который будет обозначаться $T(l, m, n)$. Координатами точки этого тора являются

$$t \pmod{c[L_0, M_0]}, \text{ определенная формулами (2.6) — (2.7);}$$

$$\psi \pmod{2\pi}; \quad \varphi \pmod{2\pi}. \quad (3.13)$$

2) Некомпактные многообразия $V[L_0, M_0]$, определенные формулой (2.4) и такие, что существуют два целых числа

$$l, m,$$

удовлетворяющие условиям

$$|m| \leq l, \quad (3.14)$$

$$L_0 = \hbar \left(l + \frac{1}{2} \right), \quad M_0 = \hbar m. \quad (3.15)$$

В этом случае $V[L_0, M_0]$ есть произведение двумерного тора с координатами $\psi \pmod{2\pi}$, $\varphi \pmod{2\pi}$ и прямой, полупрямой или промежутка с координатой t . Введем на $V[L_0, M_0]$ в обоих случаях меру, инвариантную относительно характеристических векторов H , $L^2 - L_0^2$, $M - M_0$:

$$\eta_V = dt \wedge d\varphi \wedge d\psi. \quad (3.16)$$

Тогда решения (3.1), определенные на V , будут лагранжевыми функциями с постоянной лагранжевой амплитудой.

Замечание 3.1. В дальнейшем мы ограничимся изучением компактных лагранжевых многообразий (например, случаев электрона в атоме).

Замечание 3.2. Характеристические векторы $L^2 - L_0^2$ и $M - M_0$ таковы:

$$\kappa_{L^2 - L_0^2}: \quad dL = dM = dt = 0, \quad d\psi = 2L_0, \quad d\varphi = 0, \quad (3.17)$$

$$\kappa_{M - M_0}: \quad dL = dM = dt = 0, \quad d\psi = 0, \quad d\varphi = 1. \quad (3.18)$$

Проверим, что эти векторы оставляют инвариантной форму η_V .

Доказательство (3.17). $\kappa_{L^2 - L_0^2}$ есть вектор, касательный к $V[L_0, M_0]$, такой, что в силу первой формулы (1.2), затем

первой формулы (1.5) и (1.6) и, наконец, (1.5) и (1.12)

$$dx = 2LL_p = 2(R_p^2 - Qx) = 2LRJ_2 = 2L \frac{\partial x(L, M, t, \psi, \varphi)}{\partial \psi},$$

что доказывает инвариантность (3.17).

Доказательство (3.18).

κ_{M-M_0} — вектор, касательный к $V[L_0, M_0]$, такой, что в силу (1.1), затем первой формулы (1.5) и (1.12)

$$dx = (-x_2, x_1, 0) = \frac{\partial x(L, M, t, \psi, \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Замечание 3.3. Характеристический вектор H (ср. (2.14))

$$\kappa: dL = dM = 0, dt = 1, d\psi = H_L, d\varphi = H_M \quad (3.19)$$

и характеристические векторы $L^2 - L_0^2$ и $M - M_0$ порождают, согласно теореме 7.1, 2) гл. II, § 3, *группу движений многообразия* $V[L_0, M_0]$, когда это многообразие *компактно*, т. е. является *тором*. Движения в координатах, выбранных на торе (ср. (2.7), и § 2, формулы (1.5) и (2.3)), задаются формулами

$$t \bmod c[L_0, M_0], \psi + \lambda[L_0, M_0, t] - \frac{N_L(L_0, M_0)}{c(L_0, M_0)} t \bmod 2\pi,$$

$$\varphi + \mu[L_0, M_0, t] - \frac{N_M[L_0, M_0]}{c[L_0, M_0]} t \bmod 2\pi.$$

4. Примеры: операторы Шредингера и Клейна—Гордона

Положим

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \left[p^2 - \frac{K[R, M]}{R^2} \right], \quad (4.1)$$

где $K: \mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — заданная функция. Другими словами,

$$H[L, M, Q, R] = \frac{1}{2R^2} [L^2 + Q^2 - K[R, M]]. \quad (4.2)$$

Теорема 3 применяется непосредственно.

Условие, что формула (2.4) определяет по меньшей мере одну компактную поверхность, которая является тором, таково: функция

$$\mathbb{R}_+ \ni R \mapsto K[R, M_0] - L_0^2 \in \mathbb{R}$$

между двумя последовательными нулями R_1 и R_2 ($0 < R_1 < R_2$) положительна. В этом случае (2.9) определяет

$$N[L_0, M_0] = \frac{1}{\pi} \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{K[R, M_0] - L_0^2} \frac{dR}{R} > 0. \quad (4.3)$$

Замечание 4.1. Если K есть аффинная функция M , то в силу (4.1)

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle H(x, p) = 0 \quad (4.4)$$

и, следовательно (гл. II, § 1, определение 6.2 и формула (6.3)), оператор, ассоциированный с H , имеет в репере R_0 выражение

$$a = \frac{1}{2v^2} \Delta - \frac{1}{2R^2} K \left[R, \frac{1}{v} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right], \quad (4.5)$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$; оператор $\frac{1}{v} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$ и умножение на функцию от R коммутируют друг с другом.

Пример 4.1. Назовем оператором Шредингера — Клейна — Гордона оператор, ассоциированный с гамильтонианом

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \left[P^2 + A(M) - \frac{2B(M)}{R} + \frac{C(M)}{R^2} \right], \quad (4.6)$$

где $A, B, C: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — заданные функции. Обозначим $A_0 = A(M_0)$, $B_0 = B(M_0)$, $C_0 = C(M_0)$. Условие, что формула (2.4) определяет по меньшей мере одно компактное многообразие $V[L_0, M_0]$, таково:

$$A_0 > 0, \quad L_0^2 + C_0 > 0, \quad B_0 > \sqrt{A_0} \sqrt{L_0^2 + C_0}. \quad (4.7)$$

Когда это условие удовлетворено, $V[L_0, M_0]$ определяется единственным образом и в силу (4.3)

$$N[L_0, M_0] = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{-A_0 R^2 + 2B_0 R - L_0^2 - C_0} \frac{dR}{R},$$

где интеграл вычисляется вдоль петли $\mathbf{C}$, окружающей разрез $[R_1, R_2]$. Подсчет вычетов в точке $R = \infty$ и $R = 0$ дает

$$N[L_0, M_0] = \frac{B_0}{\sqrt{A_0}} - \sqrt{L_0^2 + C_0} > 0. \quad (4.8)$$

Теорема 3 приобретает, следовательно, такой вид:

Теорема 4.1. Пусть a — оператор Шредингера — Клейна — Гордона, т. е. оператор, ассоциированный с гамильтонианом (4.6), a_{L^2} и a_M — операторы, ассоциированные с гамильтонианами L^2 и M . Тогда лагранжева система

$$aU = (a_{L^2} - L_0^2)U = (a_M - M_0)U = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}} \quad (4.9)$$

имеет решения, определенные на компактном многообразии, в том и только том случае, если существует тройка целых

чисел (l, m, n) , таких, что

$$L_0 = \hbar \left(l + \frac{1}{2} \right), \quad M_0 = \hbar m, \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{aligned} |m| \leq l < n, \quad \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - C_0 \hbar^{-2} > 0, \\ A_0 = B_0^2 \hbar^{-2} \left[n - l - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + C_0 \hbar^{-2}} \right]^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Если эти условия выполнены, то такое многообразие единственно: это тор $T(l, m, n)$ с уравнениями

$$T(l, m, n): H(x, p) = L(x, p) - L_0 = M(x, p) - M_0 = 0. \quad (4.12)$$

Снабдим этот тор инвариантной мерой (3.16); тогда решения (4.9), определенные $\text{mod } \frac{1}{v}$ на $T(l, m, n)$, есть лагранжевы функции с постоянной лагранжевой амплитудой.

Обозначения, относящиеся к физике и нужные только в заключительной части этого п. 4. Пусть в E^3 задан электрический потенциал $\mathcal{A}_0: E^3 \rightarrow \mathbb{R}$ и векторный магнитный потенциал $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3): E^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, не зависящие от времени и удовлетворяющие физическому закону

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (4.13)$$

Известно, что траектории электрона массы μ и с электрическим зарядом $-\varepsilon < 0$ в E^3 в релятивистском или нерелятивистском случае есть решения гамильтоновой системы, определенной с помощью гамильтониана, имеющего вид в *нерелятивистском случае*

$$H(x, p) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^3 \left[p_j + \frac{\varepsilon}{c} \mathcal{A}_j(x) \right]^2 - E - \varepsilon \mathcal{A}_0(x) \quad (4.14)$$

и в релятивистском случае

$$\begin{aligned} H(x, p) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^3 \left[p_j + \frac{\varepsilon}{c} \mathcal{A}_j(x) \right]^2 - \\ - \frac{1}{2\mu c^2} [E + \varepsilon \mathcal{A}_0(x)]^2 + \frac{1}{2} \mu c^2, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где c — скорость света, а E — постоянная, равная энергии электрона, положение которого x и количество движения p удовлетворяют условию $H(x, p) = 0$ (энергия, включает в релятивистском случае массу покоя μc^2).

В силу (4.13)

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle H(x, p) = 0.$$

Согласно гл. II, § 1 (6.3) и определению (6.2), оператор, ассоциированный с H , есть, следовательно, в нерелятивистском случае оператор Шредингера

$$a = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{v^2} \Delta + \frac{2\varepsilon}{c} \sum_j \mathcal{A}_j(x) \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon^2}{c^2} \sum_j \mathcal{A}_j^2(x) \right] - \\ - E - \varepsilon \mathcal{A}_0(x) \quad (4.16)$$

и в релятивистском случае оператор Клейна — Гордона

$$a = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{v^2} \Delta + \frac{2\varepsilon}{c} \sum_j \mathcal{A}_j \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon^2}{c^2} \sum_j \mathcal{A}_j^2 \right] - \\ - \frac{1}{2\mu c^2} [E + \varepsilon \mathcal{A}_0]^2 + \frac{\mu c^2}{2}. \quad (4.17)$$

Рассмотрим следующий частный случай этих гамильтонианов и этих операторов: $\mathcal{A}_0$ — электрический потенциал ядра с атомным числом Z , помещенного в начало координат; магнитное поле постоянно имеет интенсивность $\mathcal{H}$ и направлено вдоль третьей оси. Это значит, что

$$\mathcal{A}_0(x) = \frac{\varepsilon Z}{R}; \quad \mathcal{A}_1(x) = -\frac{1}{2} \mathcal{H} x_2; \quad \mathcal{A}_2(x) = \frac{1}{2} \mathcal{H} x_1, \quad \mathcal{A}_3 = 0. \quad (4.18)$$

Пренебрежем, как в физике, членами порядка $\mathcal{H}^2$. Тогда гамильтонианы (4.14) и (4.15) становятся гамильтонианами типа (4.6): в нерелятивистском случае

$$H(x, p) = \frac{1}{2\mu} \left[P^2 + \frac{\varepsilon}{c} \mathcal{H} M - 2\mu E - \frac{2\mu \varepsilon^2 Z}{R} \right], \quad (4.19)$$

в релятивистском случае

$$H(x, p) = \frac{1}{2\mu} \left[P^2 + \frac{\varepsilon}{c} \mathcal{H} M + \mu^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} - \frac{2\varepsilon^2 Z E}{c^2 R} - \frac{\varepsilon^4 Z^2}{c^2 R^2} \right]. \quad (4.20)$$

Оператор Шредингера приобретает вид

$$a = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{v^2} \Delta + \frac{\varepsilon \mathcal{H}}{c v} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - 2\mu E - \frac{2\mu \varepsilon^2 Z}{R} \right]; \quad (4.21)$$

а оператор Клейна — Гордона — вид

$$a = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{v^2} \Delta + \frac{\varepsilon \mathcal{H}}{c v} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \right. \\ \left. + \mu^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} - \frac{2\varepsilon^2 Z E}{c^2 R} - \frac{\varepsilon^4 Z^2}{c^2 R^2} \right]. \quad (4.22)$$

Соотношение (4.11)₃ определяет E как функцию (l, m, n) . Из этих вычислений возникают классические физические постоянные:

$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$ — безразмерная «постоянная тонкой структуры»,

$\beta = \frac{\varepsilon \hbar}{2\mu c}$ — «магнетон Бора» ($\beta \mathcal{H}$ имеет размерность энергии)

и функция

$$F(n, k) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha Z}{n - k + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}} \right)^2}} \quad \alpha Z \leq k \leq n. \quad (4.23)$$

Теорему 4.1 можно теперь сформулировать так:

Теорема 4.2. Пусть a — оператор Шредингера (4.21) или оператор Клейна—Гордона (4.22), H имеет вид (4.19) или (4.20). Пусть, далее, a_{L^2} и a_M операторы, ассоциированные с L^2 и M . Для некоторых значений постоянных E , L_0 , M_0 лагранжева система

$$aU = (a_{L^2} - L_0^2)U = (a_M - M_0)U = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}} \quad (4.9)$$

имеет решения, определенные по $\pmod{\frac{1}{v}}$ на компактных многообразиях; эти значения E , L_0 , M_0 выражаются через три целых числа (l, m, n) , таких, что

$$|m| \leq l < n \text{ и в случае Клейна—Гордона } l + \frac{1}{2} \geq \alpha Z.$$

Выражения для E , L_0 , M_0 таковы:

$$E = -\mu c^2 \frac{\alpha^2 Z^2}{2n^2} + \beta \mathcal{H} m \text{ в случае Шредингера; } \quad (4.24)$$

$$E^2 = \mu c^2 (\mu c^2 + 2\beta \mathcal{H} m) F^2 \left(n, l + \frac{1}{2} \right) \text{ в случае Клейна—Гордона; } \quad (4.25)$$

$$L_0 = \hbar \left(l + \frac{1}{2} \right), \quad M_0 = \hbar m. \quad (4.26)$$

Эти решения (4.9) определены на торах (4.12). Снабдим эти торы инвариантной мерой (3.16). Тогда решения будут лагранжевыми функциями с постоянной амплитудой, определенными на этих торах.

Замечание 4.2. Физики, пренебрегая величинами β^2 и $\beta \alpha^2$, упрощают (4.25) следующим образом:

$$\pm E \simeq \mu c^2 F \left(n, l + \frac{1}{2} \right) + \beta \mathcal{H} m$$

знак — относится к антиматерии ($\mu < 0$).

Замечание 4.3. Уровни энергии (4.24) и (4.25) — это те значения, которые изучение уравнения в частных производных

$$au = 0$$

дает для функции $u: E^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ и ее градиента с суммируемым квадратом (гл. III, § 4).

§ 2. ЛАГРАНЖЕВО УРАВНЕНИЕ $aU = 0 \bmod \frac{1}{v^2}$

(a АССОЦИИРОВАНО С H ; U ИМЕЕТ ЛАГРАНЖЕВУ АМПЛИТУДУ ≥ 0 И ОПРЕДЕЛЕНО НА КОМПАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ V)

0. Введение

Резюме. В § 1 изучалась задача (1) (см. введение к гл. III), т. е. система из трех лагранжевых уравнений. В этом § 2 изучается первое из этих уравнений, т. е., точнее, задача (2) (там же).

Всякое решение задачи (1) есть решение задачи (2) в силу теоремы 3 § 1. В исключительных случаях, когда гамильтониан H не зависит от M (например, уравнения Шредингера или Клейна — Гордона при отсутствии магнитного поля), одно и то же вращение E^3 , действуя на x и p , преобразует, очевидно, решения задачи (1) в такие решения задачи (2), которые не являются больше решениями задачи (1). В теореме 1 § 2 строятся, помимо этого исключительного случая, другие решения задачи (2), не являющиеся решениями задачи (1): решение задачи (2), определенное на торе $T(l, m, n)$ (§ 1, теорема 3), не обязательно является единственным с точностью до постоянного множителя.

Напротив, теорема 2 показывает, что даже если H зависит от параметров, эти торы $T(l, m, n)$ являются в общем случае единственными компактными лагранжевыми многообразиями, на которых определены решения задачи (2). Теорема 3.1, с другой стороны, дает такое уточнение: в случаях Шредингера и Клейна — Гордона задачи (1) и (2) определяют одни и те же уровни энергии: классические уровни.

Замечание. Теорема 1 этого параграфа не имеет физического содержания: в ней идет речь о рациональности или иррациональности значений, которые в случае уравнений Шредингера или Клейна — Гордона принимают физические величины.

Заключение. Назовем «хорошо поставленной задачей» задачу, которая, будучи поставлена для уравнения Шредин-

гера — Клейна — Гордона, имеет характерные черты классической задачи (4) (см. введение к гл. III): в силу теоремы 4.2 § 1 задача (1) (там же) поставлена хорошо; в силу сделанного выше замечания, как будет показано в этом § 2, задача (2) (там же) не является хорошо поставленной.

1. Решения уравнения $aU = 0 \bmod \frac{1}{v^2}$
с лагранжевой амплитудой ≥ 0 ,
определенные на торах $V[L_0, M_0]$

В § 1, п. 2 был выбран гамильтониан H и определены многообразия

$$W: H = 0; \quad V[L_0, M_0]: H = L - L_0 = M - M_0 = 0.$$

Всякое компактное лагранжево многообразие $V \subset W$ есть объединение характеристик K гамильтониана H (вдоль которых параметр t изменяется от $-\infty$ до ∞). V , следовательно, есть объединение компактного замыкания $\bar{K}$ таких характеристик.

Свойства характеристики K гамильтониана H с компактным замыканием $\bar{K}$.

Такая характеристика K в силу § 1 (2.13) принадлежит тору $V[L_0, M_0]$ и имеет на этом торе уравнения

$$K: \psi - \psi_0 + \lambda[L_0, M_0, t] = \varphi - \varphi_0 + \mu[L_0, M_0, t] = 0, \quad (1.1)$$

где φ_0 и ψ_0 постоянные. Напомним, что координаты точки тора $V[L_0, M_0]$ (ψ, φ, t) определены $(\bmod 2\pi, \bmod 2\pi, \bmod c_0)$, где $c_0 = c[L_0, M_0]$. Другими словами, пусть в $\mathbf{R}^3$ введены координаты (ψ, φ, t) . Пусть $\mathbf{Z}^3$ — аддитивная группа целочисленных троек (ξ, η, ζ) , действующих на $\mathbf{R}^3$ по закону

$$\mathbf{Z}^3 \ni (\xi, \eta, \zeta): (\psi, \varphi, t) \mapsto (\psi + 2\pi\xi, \varphi + 2\pi\eta, t + c_0\zeta).$$

Факторгруппа $\mathbf{R}^3$ по группе $\mathbf{Z}^3$ есть $V[L_0, M_0]$. Существует естественный гомоморфизм

$$\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3 = V[L_0, M_0]. \quad (1.2)$$

Для произвольной функции

$$F: (L, M, t) \rightarrow F[L, M, t] \in \mathbf{R}$$

обозначим

$$\Delta_t F[L, M, t] = F[L, M, t + c[L, M]] - F[L, M, t];$$

очевидно,

$$\Delta_t R = \Delta_t Q = 0, \quad (1.3)$$

В силу данных в § 1 определений Ω (2.8) и N (2.9)

$$\Delta_t \Omega [L, M, t] = 2\pi N [L, M]. \quad (1.4)$$

Следовательно, в силу (1.3) и данных в § 1 определений λ и μ

$$2\pi dN [L, M] = \Delta_t \lambda [L, M, t] dL + \Delta_t \mu [L, M, t] dM,$$

т. е.

$$\Delta_t \lambda = 2\pi N_L; \quad \Delta_t \mu = 2\pi N_M. \quad (1.5)$$

Обозначим

$$N_{L_0} = N_L [L_0, M_0], \quad N_{M_0} = N_M [L_0, M_0].$$

Мы можем теперь выяснить вид $\bar{K}$.

Лемма 1.1. 1) Предположим, что числа N_{L_0} и N_{M_0} рациональны:

$$N_{L_0} = -\frac{L_1}{N_1}, \quad N_{M_0} = -\frac{M_1}{N_1}, \quad (1.6)$$

где тройка $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3$ и Н.О.Д $(L_1, M_1, N_1) = 1$ (т. е. L_1, M_1, N_1 — целые числа, наибольший общий делитель которых = 1). Тогда $K = \bar{K}$ есть замкнутая кривая с уравнением (1.1).

Точнее, уравнения (1.1) определяют открытую кривую $\tilde{R}$ (т. е. кривую, гомеоморфную $\mathbf{R}^1$) в $\mathbf{R}^3$. В силу (1.5) и (1.6) подгруппа $\tilde{Z}$ группы $\mathbf{Z}^3$, порожденная элементом (L_1, M_1, N_1) , оставляет $\tilde{R}$ инвариантной. При этом

$$K = \bar{K} = \tilde{R}/\tilde{Z}. \quad (1.7)$$

2) Предположим, что N_L и N_{M_0} связаны единственным аффинным отношением

$$L_1 N_{L_0} + M_1 N_{M_0} = N_1, \text{ где } (L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3 \text{ Н.О.Д } (L_1, M_1, N_1) = 1. \quad (1.8)$$

Тогда $\bar{K}$ есть двумерный тор T^2 , определенный на $V[L_0, M_0]$ с помощью уравнения

$$L_1 \{\psi - \psi_0 + \lambda [L_0, M_0, t]\} + M_1 \{\varphi - \varphi_0 + \mu [L_0, M_0, t]\} = 0. \quad (1.9)$$

Точнее, уравнение (1.9) определяет поверхность $\tilde{R}^2$ в $\mathbf{R}^3$, гомеоморфную $\mathbf{R}^2$. В силу (1.5) и (1.8) подгруппа $\mathbf{Z}^2$ группы $\mathbf{Z}^3$ с уравнением

$$\tilde{Z}^2: L_1 \xi + M_1 \eta + N_1 \zeta = 0 \quad (1.10)$$

действует на $\tilde{R}^2$. Справедливо равенство

$$T^2 = \tilde{R}^2 / \tilde{Z}^2. \quad (1.11)$$

Для выяснения образующих $\tilde{\mathbf{Z}}^2$ обозначим

$$L_2 = \text{Н. О. Д. } (M_1, N_1), \quad M_2 = \text{Н. О. Д. } (L_1, N_1), \\ N_2 = \text{Н. О. Д. } (L_1, M_1), \quad (1.12)$$

M_2 и N_2 — делители L_1 , $\text{Н. О. Д. } (M_2, N_2) = 1$ в силу (1.8)₃; следовательно, существует L_3 и аналогично M_3 и N_3 , такие, что

$$L_1 = L_3 M_2 N_2, \quad M_1 = L_2 M_3 N_2, \quad N_1 = L_2 M_2 N_3. \quad (1.13)$$

Группа $\mathbf{Z}^2$ порождается тремя элементами:

$$(0, M_2 N_3 - M_3 N_2), \quad (-L_2 N_3, 0, L_3 N_2), \quad (L_2 M_3, -L_3 M_2, 0), \quad (1.14)$$

которые, очевидно, связаны соотношением

$$L_3 (0, M_2 N_3 - M_3 N_2) + M_3 (-L_2 N_3, 0, L_3 N_2) + \\ + N_3 (L_2 M_3, -L_3 M_2, 0) = 0. \quad (1.15)$$

3) Предположим, что N_{L_0} и N_{M_0} не связаны никаким аффинным соотношением с целыми коэффициентами. Тогда $\bar{K}$ есть тор $V[L_0, M_0]$.

Доказательство. Часть $\mathbf{R}^3$, естественным образом которой является K , определена условиями

$$\left(\frac{\psi - \psi_0 + \lambda [L_0, M_0, t]}{2\pi}, \quad \frac{\varphi - \varphi_0 + \mu [L_0, M_0, t]}{2\pi} \right) \in G,$$

где G есть образ $\mathbf{Z}^3$ в аддитивной группе $\mathbf{R}^2$ при морфизме

$$\mathbf{Z}^3 \ni (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi + N_{L_0} \zeta, \eta + N_{M_0} \zeta) \in \mathbf{R}^2.$$

Следовательно, $\bar{K}$ есть образ в $V[L_0, M_0]$ замкнутой части $\mathbf{R}^3$, определенной условием

$$\left(\frac{\psi - \psi_0 + \lambda [L_0, M_0, t]}{2\pi}, \quad \frac{\varphi - \varphi_0 + \mu [L_0, M_0, t]}{2\pi} \right) \in \bar{G}, \quad (1.16)$$

где $\bar{G}$ есть замыкание G ; $\bar{G}$ — замкнутая подгруппа $\mathbf{R}^2$. Возможны три случая: 1) G — дискретна. 2) $\dim \bar{G} = 1$; 3) $\bar{G} = \mathbf{R}^2$.

1) Предположим, что G дискретна, т. е. $\bar{G} = G$ — необходимое и достаточное условие этого, N_{L_0} и N_{M_0} рациональны. (Ср. скорость сходимости к иррациональному числу его рациональных аппроксимаций, получаемых при разложении числа в непрерывную дробь.) Это значит, что выполнено условие (1.6). Тогда $\bar{K} = K$ — подгруппа $\tilde{\mathbf{Z}}$ группы $\mathbf{Z}^3$, которая оставляет инвариантной кривую $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3$ с уравнением (1.1), состоит из элементов $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{Z}^3$, таких, что

$$N_1 \xi = L_1 \zeta, \quad N_1 \eta = M_1 \zeta.$$

В силу $(1.6)_3$ N_1 есть делитель ξ . $\tilde{Z}$, следовательно, порождено элементом $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3$.

2) Пусть $\dim \bar{G} = 1$. $\bar{G}$ в этом случае есть множество точек $(\vartheta, \tau) \in \mathbf{R}^2$, удовлетворяющих условию

$$L_1\vartheta + M_1\tau \in \mathbf{Z}, \quad (L_1, M_1 \in \mathbf{R}). \quad (1.17)$$

В силу определения G уравнение (1.17) определяет подгруппу группы $\mathbf{R}^2$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.8) и G не дискретна. В силу 1) это условие можно сформулировать так: N_{L_0} и N_{M_0} связаны единственным аффинным соотношением с целыми коэффициентами вида (1.8).

При этом предположении в силу определения (1.16) для $\bar{K}$ и определении (1.17) для $\bar{G}$ $\bar{K}$ есть образ при отображении (1.2) многообразия $\tilde{\mathbf{R}}^2 \subset \mathbf{R}^3$ с уравнением (1.9). Подгруппа $\tilde{\mathbf{Z}}^2$ группы $\mathbf{Z}^3$, которая оставляет $\tilde{\mathbf{R}}^2$ инвариантным, определяется с помощью условия (1.10), из которого в силу $(1.8)_3$ и (1.12) следует, что

$$L_2, M_2, N_2 \text{ есть делители соответственно } \xi, \eta, \zeta. \quad (1.18)$$

В силу (1.13) $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ содержит три элемента (1.14). С одной стороны, элемент $(1.14)_1$ порождает подгруппу $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ с уравнением

$$\xi = 0,$$

так как в силу $(1.12)_1$, $(1.13)_2$ и $(1.13)_3$ Н.О.Д $(M_2N_3, M_3N_2) = 1$. Следовательно, Н.О.Д $(N_3, M_3) = 1$, откуда следует, что в подгруппе $\tilde{\mathbf{Z}}_2$, порожденной элементами $(1.14)_2$ и $(1.14)_3$, ξ принимает любые значения, кратные L_2 . Три элемента (1.14), принадлежащие $\tilde{\mathbf{Z}}$, порождают, следовательно, эту группу в силу (1.18).

3) $\bar{G} = \mathbf{R}^2$. В силу 1) и 2) условие $\bar{G} = \mathbf{R}^2$ может быть выполнено в том и только том случае, когда N_{L_0} и N_{M_0} не связаны никаким аффинным соотношением с целыми коэффициентами. Если $\bar{G} = \mathbf{R}^2$, то $\bar{K}$ есть образ $\mathbf{R}^3$ при отображении (1.2), т. е. $\bar{K} = V[L_0, M_0]$.

Инвариантные меры на $V[L_0, M_0]$. Напомним, что на $V[L_0, M_0]$ существует положительная мера, инвариантная относительно κ (характеристического вектора H) (§ 1, (3.2))

$$\eta_V = dt \wedge d\varphi \wedge d\psi.$$

Всякая мера на $V[L_0, M_0]$, инвариантная относительно κ , есть произведение η_V на функцию $V[L_0, M_0] \rightarrow \mathbf{R}$, инвариантную относительно κ , т. е. постоянную на замыканиях K характеристик $\bar{K}$ гамильтониана H , принадлежащих $V[L_0, M_0]$.

Следующая лемма является, таким образом, очевидным следствием леммы 1.1.

Лемма 1.2. Предположим, что N_{L_0} и N_{M_0} — рациональные числа вида (1.6). Тогда характеристики H , принадлежащие $V[L_0, M_0]$, есть замкнутые кривые с уравнениями

$$K(c_1, c_2): \psi + \lambda[L_0, M_0, t] = c_1, \quad \varphi + \mu[L_0, M_0, t] = c_2,$$

c_1 и c_2 постоянные, определенные соответственно

$$\bmod 2\pi \frac{M_2}{N_1} = \frac{2\pi}{L_2 N_3}, \quad \bmod 2\pi \frac{L_2}{N_1} = \frac{2\pi}{M_2 N_3},$$

где

$$L_2 = \text{Н. О. Д.}(M_1, N_1), \quad M_2 = \text{Н. О. Д.}(L_1, N_1), \quad N_3 = \frac{N_1}{L_2 M_2} \in \mathbf{Z}.$$

Меры многообразия $V[L_0, M_0]$, инвариантные относительно κ (характеристического вектора H), имеют вид

$$F(\psi + \lambda[L_0, M_0, t], \varphi + \mu[L_0, M_0, t]) \eta_V; \quad (1.19)$$

$F(\cdot, \cdot)$ — произвольная функция, периодическая с периодами соответственно $2\pi \frac{M_2}{N_1}$, $2\pi \frac{L_2}{N_1}$ по своим аргументам.

2) Предположим, что N_{L_0} и N_{M_0} связаны единственным аффинным соотношением (1.8). Тогда замыкания $\bar{K}$ характеристик K , принадлежащих $V[L_0, M_0]$, есть торы, с уравнениями

$$T^2(c_0): L_1 \{\psi + \lambda[L_0, M_0, t]\} + M_1 \{\varphi + \mu[L_0, M_0, t]\} = c_0. \quad (1.20)$$

c_0 — постоянная, определенная $\bmod 2\pi$. Меры на $V[L_0, M_0]$, инвариантные относительно характеристического вектора κ , имеют вид

$$F[L_1(\psi + \lambda) + M_1(\varphi + \mu)] \eta_V; \quad (1.21)$$

$F(\cdot)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π .

3) Предположим, что N_{L_0} и N_{M_0} не связаны никаким аффинным соотношением с целыми коэффициентами. Тогда всякая характеристика K , принадлежащая $V[L_0, M_0]$, имеет в качестве замыкания $\bar{K} = V[L_0, M_0]$. Всякая мера $V[L_0, M_0]$, инвариантная относительно κ , имеет вид

$$\text{const} \cdot \eta_V. \quad (1.22)$$

Отсюда легко вывести теорему.

Теорема 1. Торы $V[L_0, M_0]$, на которых могут быть определены $\bmod \frac{1}{v}$ лагранжевы решения U с лагранжевой ампли-

тудой ≥ 0 уравнения

$$aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}$$

(a — оператор, ассоциированный с H), определены условиями (3.11) и (3.12) § 1: существуют три целых числа (l, m, n) , таких, что

$$|m| \leq l < n,$$

$$L_0 = \hbar \left(l + \frac{1}{2} \right), \quad M_0 = \hbar m, \quad L_0 + N[L_0, M_0] = \hbar n.$$

2) Для того чтобы решение U , определенное на таком торе, было с точностью до постоянного множителя единственно, необходимо и достаточно, чтобы частные производные от N

$$N_L[L_0, M_0], \quad N_M[L_0, M_0]$$

не были связаны никаким аффинным соотношением с постоянными коэффициентами.

Доказательство. В силу теоремы 6 гл. II, § 3 условие существования такого решения на $V[L_0, M_0]$ есть условие квантования Маслова: условие единственности такого решения — это условие единственности инвариантной меры (с точностью до постоянного множителя). В § 1, п. 3 этому условию квантования была дана формулировка (3.11) — (3.12). Лемма 1.2 содержит условие единственности инвариантной меры.

2. Компактные лагранжевы многообразия V , отличные от торов $V[L_0, M_0]$, на которых существуют решения уравнения $aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}$ с лагранжевой амплитудой ≥ 0

Мы покажем, что такие многообразия V существуют только в исключительных случаях.

Для вычисления индекса Маслова (леммы 2.3 и 2.4) нам понадобятся следующие свойства:

Другие свойства характеристик K гамильтониана H с компактным замыканием.

Дифференцирование формулы (2.10) (§ 1), определяющей функции λ и μ , дает

$$\frac{1}{R} dQ \wedge dR + d\lambda \wedge dL + d\mu \wedge dM = 0,$$

где Q, R, L, M — функции от (L, M, t) , удовлетворяющие условию $H[L, M, Q, R] = 0$ и, следовательно,

$$H_L dL + H_M dM + H_Q dQ + H_R dR = 0.$$

Подставляя найденное из этого соотношения выражение dQ в предыдущую формулу, получаем

$$\left[\frac{H_L}{RH_Q} dR + d\lambda \right] \wedge dL + \left[\frac{H_M}{RH_Q} dR + d\mu \right] \wedge dM = 0.$$

Существуют, следовательно, три действительные функции ρ , σ , τ от (L, M, t) , определенные при $H_Q \neq 0$, такие, что

$$\left. \begin{aligned} d\lambda &= -\frac{H_L}{RH_Q} dR + \rho dL + \sigma dM, \\ d\mu &= -\frac{H_M}{RH_Q} dR + \sigma dL + \tau dM. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

В силу выражений (1.5) для $\Delta_t \lambda$ и $\Delta_t \mu$ и затем данного в § 1 определения (2.6) функции t из этих соотношений вытекает

$$\Delta_t \rho = 2\pi N_{L^2}; \quad \Delta_t \sigma = 2\pi N_{LM}; \quad \Delta_t \tau = 2\pi N_{M^2}, \quad (2.2)$$

$$\lambda_t [L, M, t] = -H_L [L, M, Q, R]; \quad \mu_t = -H_M. \quad (2.3)$$

Выясним, какова особенность при $H_Q = 0$ функций ρ , σ , τ и $\rho\tau - \sigma^2$. В силу (2.1)

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{R_L H_L}{RH_Q} + \lambda_L, \quad \sigma = \frac{R_M H_L}{RH_Q} + \lambda_M = \frac{R_L H_M}{RH_Q} + \mu_L; \\ \tau &= \frac{R_M H_M}{RH_Q} + \mu_M. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поэтому

$$\rho\tau - \sigma^2 = \frac{1}{RH_Q} [R_L H_L \mu_M - R_M H_L \mu_L - R_L H_M \lambda_M + R_M H_M \lambda_L] + \\ + \lambda_L \mu_M - \lambda_M \mu_L.$$

Но, так как $H[L, M, Q, R] = 0$, мы имеем

$$H_R R_L + H_L + H_Q Q_L = H_R R_M + H_M + H_Q Q_M = 0.$$

Если $H_Q \neq 0$, эти равенства позволяют исключить R_L и R_M из приведенных выше выражений для ρ , σ , τ и $\rho\tau - \sigma^2$. В силу предположения (2.2) § 1

$$H_R \neq 0 \quad \text{при} \quad H_Q = 0.$$

Следовательно, имеет место

Лемма 2.1. Функции

$$\left\{ \begin{aligned} &\rho + \frac{H_L^2}{RH_Q H_R}, \quad \sigma + \frac{H_L H_M}{RH_Q H_R}, \quad \tau + \frac{H_M^2}{RH_Q H_R}, \\ &\rho\tau - \sigma^2 + \frac{1}{RH_Q H_R} [H_L^2 \mu_M - H_L H_M (\mu_L + \lambda_M) + H_M^2 \lambda_L] \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

ограничены в окрестности точек, в которых $H_Q = 0$.

Свойства компактных лагранжевых многообразий $V \subset W$. V порождается характеристиками H , замыкание которых компактно и которые, следовательно, принадлежат торами $V[L_0, M_0]$. Следовательно, на V определены функции

$$L, M, N = N[L, M], \quad c = c[L, M].$$

Обозначим через V_2 открытую часть V , на которой $dL \wedge dM \neq 0$, если это множество не пусто.

Через V_1 обозначим открытую часть V , на которой $dL \wedge dM = 0$, а $(dL, dM) \neq 0$, если это множество не пусто. V_1 и V_2 — лагранжевы многообразия, не обязательно компактные, порожденные характеристиками K гамильтониана H , с компактными замыканиями $\bar{K}$; V_1 и V_2 содержат эти замыкания.

Если не существует многообразий V_2 и V_1 , то V есть один из торов $V[L_0, M_0]$. В силу следующей леммы V_1 и V_2 существуют только в том случае, если график функции

$$N: (L, M) \mapsto N[L, M]$$

содержит прямолинейный отрезок с рациональным направлением.

Из этой леммы будет вытекать, таким образом, следствие теоремы 2, сформулированное во введении (§ 2, п. 0).

Лемма 2.2. 1) На V_2 N — аффинная функция L и M . Точнее, существует тройка целых чисел

$(L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3$; Н. О. Д $(L_1, M_1, N_1) = 1$, такая, что

$$L_1 dL + M_1 dM + N_1 dN = 0. \quad (2.6)$$

V_2 определено на W заданием функции F от двух переменных с уравнениями

$$\psi + \lambda[L, M, t] + F_L[L, M] = \varphi + \mu[L, M, t] + F_M[L, M] = 0. \quad (2.7)$$

Более точно, в пространстве $\mathbf{R}^5$ с координатами (L, M, ψ, φ, t) уравнения (2.7) определяют трехмерное многообразие $\tilde{V}_2$.

В силу (1.5), где $N_L = -\frac{L_1}{N_1}$, $N_M = -\frac{M_1}{N_1}$, элементы (ξ, η, ζ) подгруппы $\tilde{\mathbf{Z}} \subset \mathbf{Z}^3$, порожденной элементом (L_1, M_1, N_1) , действуют на $\tilde{V}_2$ следующим образом:

$$(\xi, \eta, \zeta): (L, M, \psi, \varphi, t) \mapsto (L, M, \psi + 2\pi\xi, \varphi + 2\pi\eta, t + c[L, M]\zeta). \quad (2.8)$$

Тогда

$$V_2 = \tilde{V}_2 / \tilde{\mathbf{Z}}_1. \quad (2.9)$$

На V_2 существует мера, инвариантная относительно характеристического вектора κ_H : $\eta_V = dL \wedge dM \wedge dt$.

2) На V_1 L, M и N суть аффинные функции от одной переменной s , т. е.

$$\frac{dL}{L_1} = \frac{dM}{M_1} = \frac{dN}{N_1} = ds, \quad (2.10)$$

где $(L_1, M_1) \neq 0$, $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbb{Z}^3$, Н.О.Д $(L_1, M_1, N_1) = 1$. V_1 определено на W заданием трех функций от s : L и M , аффинных, удовлетворяющих (2.10), и функции $F(s)$. Уравнения V_1 таковы:

$$\left. \begin{aligned} L &= L(s), \quad M = M(s), \\ L_1 \{\psi + \lambda[L, M, t]\} + M_1 \{\varphi + \mu[L, M, t]\} + F_s(s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Точнее, эти уравнения (2.11) определяют в $\mathbb{R}^5$ трехмерное многообразие $\tilde{V}_1$, на котором по закону (2.8) действует подгруппа $\tilde{\mathbb{Z}}^2$ группы $\mathbb{Z}^3$, определенная соотношением (1.10); напомним, что эта подгруппа порождается элементами (1.14) группы $\mathbb{Z}^3$. При этом

$$V_1 = \tilde{V}_1 / \tilde{\mathbb{Z}}^2. \quad (2.12)$$

На V_1 определена мера, инвариантная относительно характеристического вектора κ_H :

$$\eta_V = (M_1 d\psi - L_1 d\varphi) \wedge ds \wedge dt.$$

3) Фазы V_1 и V_2 в репере R_0 равны

$$\varphi_{R_0} = \Omega + L\psi + M\varphi + F. \quad (2.13)$$

Замечание 2.1. Формулы (2.8) и (2.10) § 1 определили функцию Ω с точностью до слагаемого вида $F(L, M)$, а функции λ и μ с точностью до производных этой функции $F_L[L, M]$ и $F_M[L, M]$.

Если заданы V_1 и V_2 , то можно, следовательно, выбрать Ω так, чтобы в формулах (2.7), (2.11) и (2.13) было

$$F = 0.$$

Чтобы квантовать V , нам понадобится только следствие из (2.13) и определения из § 1: $c[L, M]$ (формула (2.7)) и N (формула (2.9)). Если $F = 0$, то функция

$$\varphi_{R_0} - 2\pi N \frac{t}{c[L, M]} - L\psi - M\varphi \quad (2.14)$$

определена на V_1 и на V_2 .

Предварительные замечания к доказательству леммы. В силу формулы (2.11) § 1 можно применить теорему 3.1 гл. II, § 3, где

$$l = 3, \quad h_1 = L, \quad h_2 = M, \quad g_0 = \Omega + L\psi + M\varphi, \\ g_1 = -\psi - \lambda, \quad g_2 = -\varphi - \mu$$

и лагранжева фаза φ_{R_0} равна ψ .

Всякое лагранжево многообразие $V \subset W$ имеет, следовательно, локальные уравнения одного из четырех следующих типов:

$$\varphi + \lambda + F_L[L, M] = \varphi + \mu + F_M = 0, \quad (2.15)_1$$

$$M = f(L); \quad \psi + \lambda + f_L(L)(\varphi + \mu) + F_L(L) = 0, \quad (2.15)_2$$

(2.15)₃ выводится из (2.15)₂ перестановкой пар (L, ψ) и (M, φ) ,

$$L = \text{const}, \quad M = \text{const}; \quad (2.15)_4$$

f и F — функции от одной соответственно двух переменных. Фаза φ_{R_0} многообразия V задается формулой (2.13), в которой в четвертом случае $F = 0$.

Доказательство. 1) Локально V_2 имеет уравнения типа (2.15)₁. Следовательно, V_2 порождено характеристиками K , принадлежащими дискретным торам $V[L_0, M_0]$. Их замыкания $\bar{K}$, таким образом, дискретны и принадлежат V_2 , $\dim V_2 = 3$; следовательно,

$$\dim \bar{K} = 1.$$

В силу леммы 1.1 значения N_L и N_M на V — рациональные числа. Поэтому функции N_L и N_M постоянны на V и удовлетворяют (1.6), т. е. удовлетворяют (2.6). Отсюда утверждение 1) и формула (2.13).

2) Локально многообразие V_1 имеет уравнения типа (2.15)₂ или (2.15)₃, т. е. типа

$$L = L(s), \quad M = M(s), \quad L_s(s)(\psi + \lambda) + M_s(s)(\varphi + \mu) + F_s(s) = 0, \quad (2.16)$$

где $(L_s, M_s) \neq 0$.

Для каждого значения s обозначим $T(s)$ подмногообразие W с уравнениями (2.16): $\dim T(s) = 2$.

Так как V_1 порождено характеристиками с уравнениями

$$L = \text{const}, \quad M = \text{const}, \quad \psi + \lambda = \text{const}, \quad \varphi + \mu = \text{const}$$

и содержит их замыкания, то V_1 содержит замыкания $\overline{T(s)}$ многообразий $T(s)$. Определим их.

Так как $\Delta_t \lambda$ и $\Delta_t \mu$ задаются формулой (1.5) и так как $L_s N_L + M_s N_M = N_s$, то многообразие $T(s)$ есть образ в W множества точек $(\psi, \varphi, t) \in \mathbf{R}^3$, таких, что

$$L_s \frac{\varphi + \lambda[L, M, t]}{2\pi} + M_s \frac{\varphi + \mu[L, M, t]}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} F_s \in G(s),$$

где $G(s)$ есть образ $\mathbf{Z}^3$ в аддитивной группе $\mathbf{R}$ при морфизме

$$\mathbf{Z}^3 \ni (\xi, \eta, \zeta) \mapsto L_s \xi + M_s \eta + N_s \zeta.$$

Следовательно, $\overline{T(s)}$ есть образ в W множества $(\psi, \varphi, t) \in \mathbb{R}^3$, такого, что

$$L_s \frac{\psi + \lambda [L, M, t]}{2\pi} + M_s \frac{\varphi + \mu [L, M, t]}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} F_s(s) \in \overline{G(s)},$$

где $\overline{G(s)}$ — замыкание $G(s)$, т. е. замкнутая подгруппа $\mathbb{R}$. Поэтому $\overline{G(s)} = \mathbb{R}$ и, следовательно, $\overline{T(s)}$ — трехмерный тор $V[L(s), M(s)]$, за исключением того случая, когда $G(s)$ дискретна. В этом случае существует тройка $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbb{Z}^3$, такая, что

$$\frac{L_s}{L_1} = \frac{M_s}{M_1} = \frac{N_s}{N_1} \quad \text{Н. О. Д. } (L_1, M_1, N_1) = 1.$$

Так как $\dim V_1 = 3$, это должно быть так для всех s . Функции M_s/L_s , N_s/L_s принимают рациональные значения, т. е. постоянны. Целые числа L_1, M_1, N_1 не зависят от s . Эту переменную s можно выбрать так, чтобы имело место (2.10). Отсюда следует доказательство 2) и формулы (2.13) в этом случае.

Квантование V . Наложим на V условие квантования Маслова. Чтобы выразить его в явной форме, вычислим индекс Маслова m_{R_0} многообразий V_2 и V_1 . Для этого воспользуемся леммой 1 § 1.

Положим в лемме 2.2 $F = 0$ (см. замечание 2.1).

Лемма 2.3. 1) Функции ρ, σ, τ определены на V_2 . Обозначим $\bar{\mathbb{R}}$ множество, полученное из $\mathbb{R}$ добавлением бесконечно удаленной точки. Функция $F: V_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ вида:

$$F(L, M, t) = \frac{\rho L^2 + 2\sigma LM + \tau M^2}{L(L^2 - M^2)(\rho\tau - \sigma^2)} \in \bar{\mathbb{R}} \quad (2.17)$$

определена, следовательно, на $V_2 \setminus \Sigma''$, где Σ'' — часть V_2 , на которой

$$\Sigma'': \frac{\rho}{M^2} = -\frac{\sigma}{LM} = \frac{\tau}{L^2}. \quad (2.18)$$

2) Если $V_2 \setminus \Sigma''$ связно, то на его универсальном накрытии

$$m_{R_0} = \left[\frac{1}{\pi} \psi + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} F(L, M, t) \right] \quad ([\dots] — \text{целая часть } \dots). \quad (2.19)$$

3) Функция

$$m_{R_0} = \frac{1}{\pi} \psi - 2 \frac{t}{c[L, M]} \quad (2.20)$$

определена (т. е. однозначна) на V_2 .

Замечание 2.2. Предположим, что задана функция $N: (L, M) \mapsto N[L, M]$, удовлетворяющая условию (2.6). Выберем H , удовлетворяющее условию (2.9) § 1. Если при этом $\dim \Sigma'' = 1$, то $V_2 \setminus \Sigma''$ связно.

Доказательство. 1) Напомним, что (L, M, t) — локальные координаты на V_2 ; в силу (2.2) и (2.6)

$$\Delta_t \rho = \Delta_t \sigma = \Delta_t \tau = 0,$$

откуда следует 1).

2) *Особый контур* многообразия V_2 . Из формул (1.11) и (1.13) § 1 следует, что на W

$$\begin{aligned} \frac{L}{\sin \vartheta} \omega_2 \wedge \omega_3 &= L \sin \varphi d\varphi \wedge d\psi + \\ &+ \frac{\cos \psi}{L^2 - M^2} (M dL - L dM) \wedge (L d\psi + M d\varphi). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Но дифференцирование уравнений (2.7), где $F = 0$, в силу определения (2.1) функций ρ, σ, τ , дает на V_2

$$d\psi + \rho dL + \sigma dM = d\varphi + \sigma dL + \tau dM = 0 \pmod{dR}.$$

Согласно формуле (2.6) § 1,

$$dR = RH_Q dt \pmod{(dL, dM)}.$$

Отсюда

$$\frac{L}{R \sin \vartheta} dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = G(L, M, t, \psi) dL \wedge dM \wedge dt, \quad (2.22)$$

где через G обозначена функция

$$G = -H_Q \left[L(\rho\tau - \sigma^2) \sin \psi + \frac{\rho L^2 + 2\sigma LM + \tau M^2}{L^2 - M^2} \cos \psi \right],$$

в силу леммы 2.1 регулярная на V_2 .

В силу леммы 1 § 1 *особый контур* Σ_{R_0} многообразия V_2 имеет, следовательно, вид

$$\Sigma_{R_0} = \Sigma' \cup \Sigma'';$$

здесь Σ'' определено условием (2.18). Σ' есть поверхность, принадлежащая $V_2 \setminus \Sigma''$, с уравнением

$$\Sigma': \operatorname{tg} \psi + F(L, M, t) = 0, \quad (2.23)$$

где F определено формулой (2.17).

Вычисление m_{R_0} . Формулы (1.11) и (1.13) § 1 дают на W

$$\begin{aligned} \frac{L}{\sin \vartheta} \omega_3 \wedge \omega_1 &= L \cos \psi d\varphi \wedge d\psi - \\ &- \frac{\sin \psi}{L^2 - M^2} (M dL - L dM) \wedge (L d\psi + M d\varphi), \end{aligned} \quad (2.24)$$

откуда вычислениями, аналогичными тем, с помощью которых из (2.21) выведено (2.22), получаем

$$\frac{L}{R \sin \vartheta} dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 = G_\psi(L, M, t, \psi) dL \wedge dM \wedge dt. \quad (2.25)$$

Формулы (2.22) и (2.25) и лемма 1 § 1 дают в окрестности точек Σ'

$$\begin{aligned} m_R &= \text{const} && \text{при } G/G_\psi < 0, \\ m_R &= \text{const} + 1 && \text{при } G/G_\psi > 0. \end{aligned}$$

Этот результат, очевидно, верен для всякой функции G , имеющей простой нуль на Σ' , например для функции

$$G = \frac{1}{\pi} \psi + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} F(L, M, t). \quad \text{mod}(1)$$

Следовательно, на $V_2 \setminus \Sigma''$ m_{R_0} имеет локальное выражение (2.19) с точностью до аддитивной постоянной. Отсюда п. 2) леммы.

3) Предположим, сначала, что H и Ω таковы, что $V_2 \setminus \Sigma''$ связно (см. замечание 2.2) и

$$LH_L + MH_M \neq 0 \quad \text{при } H_Q = 0.$$

Отсюда в силу леммы 2.1 следует, что определена функция

$$f = \rho L^2 + 2\sigma LM + \tau M^2: V_2 \setminus \Sigma'' \rightarrow \bar{\mathbb{R}}.$$

В силу (2.19) на $V_2 \setminus \Sigma''$ определена также функция

$$m_{R_0} - \frac{1}{\pi} \psi - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} F. \quad (2.26)$$

По определению F , где, согласно предположению (2.2) § 1, $|M| < L$, в окрестности тех точек, в которых $F = 0$, имеет место неравенство

$$F/f < 0.$$

$F = 0$ эквивалентно $f = 0$. Поэтому функция

$$\operatorname{arctg} F + \operatorname{arctg} f \quad (2.27)$$

определена на $V_2 \setminus \Sigma''$. Но

$$\operatorname{arctg} f + \operatorname{arctg} \frac{1}{f} = \text{const}. \quad (2.28)$$

Согласно лемме 2.1, равенство $\frac{1}{f} = 0$ эквивалентно тому, что $H_Q = 0$, и в окрестности точек, в которых $H_Q = 0$,

$$\frac{H_Q}{H_R} f < 0,$$

следовательно, на $V_2 \setminus \Sigma''$ определена функция

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{f} + \operatorname{arctg} \frac{H_Q}{H_R}. \quad (2.29)$$

Согласно ориентации Γ (§ 1, формула (2.9)), на $\Gamma[L, M]$ определена функция

$$\operatorname{arctg} \frac{H_Q}{H_R} + 2\pi \frac{t}{c[L, M]}. \quad (2.30)$$

Формулы (2.26) — (2.30) доказывают утверждение 3) для связного $V_2 \setminus \Sigma''$, т. е. в общем случае справедлива лемма:

Лемма 2.4. 1) Определим на V_1 постоянную N_0 и функцию r соотношениями

$$L_1 M - M_1 L = N_0, \quad (2.31)$$

$$\psi + \lambda + M_1 r = \varphi + \mu - L_1 r = 0. \quad (2.32)$$

Функции r, s, t являются координатами точек $\tilde{V}_1$. Функция $F: V_1 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ определена формулой

$$F(r, s, t) = \frac{N_0^2}{L(L^2 - M^2)(\rho L_1^2 + 2\sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2)}. \quad (2.33)$$

2) Если V_1 такова, что $N_0 \neq 0$, $H_{L^2} L_1^2 + 2H_{LM} L_1 M_1 + H_{M^2} M_1^2 \neq 0$ при $H_Q = 0$, то

$$m_{R_0} = \left[\frac{1}{\pi} \psi + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} F(r, s, t) \right] \quad ([...] - \text{целая часть } \dots). \quad (2.34)$$

3) Функция (2.20) определена на V_1 .

Доказательство. 1) Формула (2.11)₂ при $F = 0$ (замечание 2.1) оправдывает определение (2.32) функции r . В силу (2.2) и (2.10)

$$\begin{aligned} \Delta_t(\rho L_1^2 + 2\sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2) &= \\ &= 2\pi(L_1^2 N_{L^2} + 2L_1 M_1 N_{LM} + M_1^2 N_{M^2}) = 2\pi \frac{d^2 N}{ds^2} = 0. \end{aligned}$$

2) Особый контур V_1 . Дифференцирование (2.32) дает в силу (2.10) и определения (2.1) функций ρ, σ, τ

$$d\psi + (\rho L_1 + \sigma M_1) ds + M_1 dr = d\varphi + (\sigma L_1 + \tau M_1) ds - L_1 dr = 0 \quad (\text{mod } dR)$$

откуда в силу (2.21), так как $dR = RH_Q dt \pmod{(dL, dM)}$, т. е. $\text{mod } ds$:

$$\frac{L}{R \sin \vartheta} dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = G(s, t, \psi) ds \wedge dr \wedge dt, \quad (2.35)$$

где $G(s, t, \psi) = H_Q \left[L(\rho L_1^2 + 2\sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2) \sin \psi + \right. \\ \left. + \frac{N_0^2}{L^2 - M^2} \cos \psi \right].$

В силу 1) и леммы 2.1 функция $G: V_1 \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ определена и регулярна на V_1 . Согласно лемме 1 § 1, особый контур Σ_{R_0} многообразия V_1 имеет уравнение

$$\Sigma_{R_0}: \operatorname{tg} \psi + F(r, s, t) = 0.$$

Вычисление m_{R_0} . Вычисление, выводящее (2.35) из (2.21), позволяет из (2.24) получить формулу

$$\frac{L}{R \sin \vartheta} dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 = G_\psi(s, t, \psi) ds \wedge dr \wedge dt.$$

Отсюда, применяя лемму 1 § 1, как это было сделано при доказательстве утверждения 2 леммы 2.3, получаем выражение (2.34) для m_{R_0} .

3) Предположим, что V_1 удовлетворяет условию п. 2 леммы. В силу (2.34) функция

$$m_{R_0} - \frac{1}{\pi} \psi - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} F(r, s, t) \quad (2.36)$$

определена на V_1 .

В силу (2.33), где $|M| < L$ согласно предположению (2.2) § 1, и в силу леммы 2.1 условие $F = 0$ эквивалентно $H_Q = 0$. В окрестности точек V_1 , в которых $H_Q = 0$,

$$F \frac{H_R}{H_Q} < 0;$$

следовательно, на V_1 определена функция

$$\operatorname{arctg} F + \operatorname{arctg} \frac{H_Q}{H_R}. \quad (2.37)$$

Формулы (2.30), (2.36) и (2.37) доказывают, что функция (2.20) определена на V_1 при выполнении условия п. 2) леммы и, следовательно, в общем случае

Лемма 2.5. 1) Для того чтобы V_2 удовлетворяло условию квантования Маслова, необходимо и достаточно, чтобы на V_2 функции L , M и N были связаны соотношением

$$L_1 \left(L - \frac{\hbar}{2} \right) + M_1 M + N_1 \left(N + \frac{\hbar}{2} \right) = \hbar N_0, \quad (2.38)$$

где

$$L_1, M_1, N_1 \neq 0, N_0 \in \mathbf{Z}, N_1 \neq 0, \text{ Н. О. Д. } (L_1, M_1, N_1) = 1. \quad (2.39)$$

2) Для того чтобы V_1 удовлетворяло условию квантования Маслова, необходимо и достаточно, чтобы на V_1 функции L, M и N были связаны тремя соотношениями

$$(L_1, M_1, N_1) \wedge \left(L - \frac{\hbar}{2}, M, N + \frac{\hbar}{2}\right) = \hbar (L_0, M_0, N_0), \quad (2.40)$$

где знаком $\wedge$ обозначено векторное произведение в E^3 :

$$\left. \begin{aligned} L_1, M_1, N_1, L_0, M_0, N_0 \in \mathbf{Z} \quad L_1^2 + M_1^2 \neq 0 \\ \text{Н. О. Д.}(L_1, M_1, N_1) = 1, \quad L_0 L_1 + M_0 M_1 + N_0 N_1 = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.41)$$

При этом из трех равенств (2.40) независимы только два.

Предварительные замечания к доказательству. Многообразие V удовлетворяет условию квантования Маслова (гл. III, § 3, определение 6.2), если функция

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \Phi_R - \frac{1}{4} m_R \quad \text{определена mod 1 на } V.$$

В силу (2.14) и (2.20) V_1 или V_2 удовлетворяют, следовательно, этому условию, если функция

$$\left(\frac{L}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) \frac{\psi}{2\pi} + \frac{M}{\hbar} \frac{\varphi}{2\pi} + \left(\frac{N}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) \frac{t}{c[L, M]} \quad (2.42)$$

определена mod 1 на V_1 или V_2 .

Доказательство. 1) В силу леммы 2.2, 1) функция (2.42) определена на $\tilde{V}_2$; $V_2 = \tilde{V}_2 / \tilde{\mathbf{Z}}_0$, где подгруппа $\tilde{\mathbf{Z}}$ имеет образующую

$$(L_1, M_1, N_1)$$

и действует на $\tilde{V}_2$ по формуле (2.8). Условие квантования Маслова имеет вид

$$\left(\frac{L}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) L_1 + \frac{M}{\hbar} M_1 + \left(\frac{N}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) N_1 \in \mathbf{Z},$$

откуда следует 1).

2) В силу леммы 2.2, 2) функция (2.42) определена на $\tilde{V}_1$; $V_1 = \tilde{V}_1 / \tilde{\mathbf{Z}}^2$. Группа $\tilde{\mathbf{Z}}^2$ имеет образующие

$$(0, M_2 N_3, -M_3 N_2), \quad (-L_2 N_3, 0, L_3 N_2), \quad (L_2 M_3, -L_3 M_2, 0),$$

где $L_2, \dots, N_3$ определены формулами (1.12) и (1.13). $\tilde{\mathbf{Z}}^2$ действует на $\tilde{V}_2$ согласно (2.8).

Условия квантования Маслова имеют, таким образом, вид

$$\frac{M}{\hbar} M_2 N_3 - \left(\frac{N}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) M_3 N_2 \in \mathbf{Z},$$

$$- \left(\frac{L}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) L_2 N_3 + \left(\frac{N}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) L_3 N_2 \in \mathbf{Z},$$

$$\left(\frac{L}{\hbar} + \frac{1}{2}\right) L_2 M_3 - \frac{M}{\hbar} L_3 M_2 \in \mathbf{Z}.$$

В силу (2.13) эти условия эквивалентны условиям (2.40) — (2.41), дополненным следующими: L_0, M_0, N_0 кратны соответственно L_2, M_2, N_2 . Но

$$L_2 = \text{Н. О. Д.}(M_1, N_1), \dots$$

Поэтому последнее условие вытекает из (2.41). Утверждение 2) доказано.

Теорема 2. *Предположим, что лагранжево уравнение*

$$aU = 0 \bmod \frac{1}{v^2} \quad (a — \text{оператор, ассоциированный с } H)$$

имеет решение U с лагранжевой амплитудой ≥ 0 , которое определено $\bmod \frac{1}{v}$ на компактном лагранжевом многообразии V , отличном от торов $V[L_0, M_0]$, изученных в теореме 1. Тогда график функции

$N: (L, M) \mapsto N[L, M]$ (ср. гл. III, § 1, 2.9)
содержит отрезок прямой с плюкеровыми координатами

$$(L_1, M_1, N_1) \wedge \left(L - \frac{\hbar}{2}, M, N + \frac{\hbar}{2} \right) = \hbar (L_0, M_0, N_0), \quad (2.40)$$

так что

$$\begin{aligned} L_1, M_1, N_1, L_0, M_0, N_0 &\in \mathbf{Z}, \quad L_1^2 + M_1^2 \neq 0, \\ \text{Н. О. Д.}(L_1, M_1, N_1) &= 1, \quad L_0 L_1 + M_0 M_1 + N_0 N_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Дополнение. Условие

$$N'_0 \in \mathbf{Z}$$

необходимо и достаточно для существования такого сегмента в плоской области, принадлежащей графику N и заданному уравнением

$$L'_1 \left(L - \frac{\hbar}{2} \right) + M'_1 M + N'_1 \left(N + \frac{\hbar}{2} \right) = \hbar N'_0, \quad (2.42)$$

таким, что

$$L'_1, M'_1, N'_1 \in \mathbf{Z}, \quad \text{Н. О. Д.}(L'_1, M'_1, N'_1) = 1, \quad N'_0 \in \mathbf{R}. \quad (2.43)$$

Замечание 2.3. Это дополнение облегчает применение теоремы (ср. п. 3).

Доказательство теоремы. В силу теоремы 6 из § 3 гл. II V должно удовлетворять условию квантования Маслова. Так как V не является тором $V[L_0, M_0]$, то V должно содержать лагранжевы многообразия V_2 или V_1 , удовлетворяющие этим условиям квантования. По лемме 2.5 график функции N должен содержать

или отрезок прямой, удовлетворяющей (2.40) — (2.41),
или часть плоскости с уравнением (2.38) — (2.39)
и, следовательно, такой сегмент.

Доказательство дополнения. Из условия $N'_0 \in \mathbf{Z}$ следует, очевидно, существование такого сегмента. Обратно, предположим, что в пространстве $\mathbf{R}^3$ с координатами (L, M, N) плоскость с уравнениями (2.42) — (2.43) содержит прямую с уравнениями (2.40) — (2.41). Это означает выполнение четырех соотношений (не независимых)

$$L_1 L'_1 + M_1 M'_1 + N_1 N'_1 = 0,$$

$$N'_0 = \frac{M'_1 N_0 - N'_1 M_0}{L_1} = \frac{N'_1 L_0 - L'_1 N_0}{M_1} = \frac{L'_1 M_0 - M'_1 L_0}{N_1}.$$

Из этих уравнений следует, что $N'_0 \in \mathbf{Z}$, так как $H. O. D(L_1, M_1, N_1) = 1$.

3. Пример: оператор Шредингера—Клейна—Гордона

Выберем в качестве оператора a оператор, ассоциированный с гамильтонианом H , определенным в § 1 формулой (4.6), где A будет предполагаться аффинной функцией от M , B , а C — постоянными, $B > 0$. В § 1 изучалась система

$$aU = (a_{L^2} - L_0^2)U = (a_M - M_0)U = 0$$

и были найдены классические уровни энергии.

Изучая одно уравнение

$$aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}},$$

мы найдем те же условия существования и, следовательно, те же классические уровни энергии.

Теорема 3.1. Лагранжево уравнение

$$aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}} \tag{3.1}$$

имеет решение U с лагранжевой амплитудой ≥ 0 , определенной $\pmod{\frac{1}{v}}$ на компактном многообразии V в том и только том случае, если существует тройка целых чисел (l, m, n) , удовлетворяющих условиям (4.11) теоремы 4.1 § 1

Замечание 3. Эти условия не обеспечивают ни единственности V , ни единственности U с точностью до постоянного множителя (ср. теорему 1).

Доказательство. Существование такого решения уравнения (3.1) при условии (4.11) § 1 следует из теоремы 1 и теоремы 4.1 § 1. По теореме 1 такое решение на торе $V[L_0, M_0]$ может существовать только при выполнении этого условия.

Теорема 2 и формула (4.8) § 1 дают для функции N значение

$$N[L, M] = \frac{B}{\sqrt{A(M)}} - \sqrt{L^2 - C}. \quad (3.2)$$

Существование решения, удовлетворяющего условиям теоремы на компактном многообразии, отличном от такого тора, требует, чтобы график N содержал отрезок прямой. Это требование выполнено в одном из трех случаев:

Первый случай. $A(M) = A_0$ (не зависит от M), $C = 0$. В силу (3.2) график N в этом случае есть плоскость с уравнением

$$L + N = \frac{B}{\sqrt{A_0}}.$$

Теорема 2 и дополнение к ней требуют для существования решения, чтобы выполнялось условие

$$\frac{B}{\sqrt{A_0}} = \hbar n, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

При этом выполнено условие (4.11) теоремы 4 § 1, так как оно не зависит от l для $C = 0$ и от m для $A(M) = \text{const}$.

Второй случай. $C = 0$, A зависит от M . В силу (3.2) график N содержит только прямые с уравнениями

$$M = M_0, \quad N + L = \frac{B}{\sqrt{A_0}}, \quad \text{где } M_0 = \text{const}, \quad A_0 = A(M_0). \quad (3.3)$$

Плюкеровы уравнения таких прямых имеют вид

$$(1, 0, -1) \wedge \left(L - \frac{\hbar}{2}, M, N + \frac{\hbar}{2} \right) = \left(M_0, -\frac{B}{\sqrt{A_0}}, M_0 \right).$$

Теорема 2 требует существования целых чисел m и n , таких, что

$$M_0 = \hbar m, \quad \frac{B}{\sqrt{A_0}} = \hbar n. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) следует, что $n < |m|$, потому что $N > 0$ и $L > |M|$ согласно предположению (ср. условия (2.2) § 1). Следовательно, выполнены условия (4.11) § 1.

Третий случай. $A = A_0$ не зависит от M , $C \neq 0$. В силу (3.2) график N содержит только прямые с уравнениями

$$L = L_0, \quad N = \frac{B}{\sqrt{A_0}} - \sqrt{L_0^2 + C}, \quad \text{где } L_0 - \text{постоянная,} \\ L_0^2 + C > 0.$$

Плюкеровы уравнения этих прямых имеют вид

$$(0, 1, 0) \wedge \left(L - \frac{\hbar}{2}, M, N + \frac{\hbar}{2} \right) = \left(\frac{B}{\sqrt{A_0}} - \sqrt{L_0^2 + C} + \frac{\hbar}{2}, \right. \\ \left. 0, \frac{\hbar}{2} - L_0 \right).$$

Теорема 2 требует существования l и n , таких, что

$$\frac{B}{\sqrt{A_0}} + L_0 - \sqrt{L_0^2 + C} = \hbar n, \quad L_0 = \hbar \left(l + \frac{1}{2} \right);$$

$0 \leq l$, так как $0 < L_0$, $l < n$, так как $N > 0$ по предположению. Следовательно, условия (4.11) § 1 выполнены.

Теорема 3.2. *Выберем в качестве a оператор Клейна — Гордона (4.22) (§ 1). Предположим, что магнитное поле $\mathcal{H} \neq 0$. Тогда торы $T(l, m, n)$, определенные формулой (4.12) § 1, являются единственными компактными многообразиями, на которых существует лагранжево решение U с лагранжевой амплитудой ≥ 0 уравнения*

$$aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}.$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 3.1 вытекает, что необходимое условие, которое сформулировано в теореме 2, не может быть выполнено, когда a есть оператор Клейна — Гордона ($C \neq 0$) и $\mathcal{H} \neq 0$ (A зависит от M).

Заключение. Мы не продолжаем здесь сложное исследование уравнения $aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}$. В частности, мы не выясняем вида лагранжевых многообразий, отличных от торов $T(l, m, n)$, на которых существуют решения уравнения Шредингера или решения уравнения Клейна — Гордона при $\mathcal{H} = 0$.

§ 3. ЛАГРАНЖЕВА СИСТЕМА:

$$aU = (a_M - \text{const}) U = (a_{L^2} - \text{const}) U = 0,$$

КОГДА a —ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА—КЛЕЙНА—ГОРДОНА

0. Введение

В этом § 3 более подробно изучается лагранжева система, которая в § 1 решалась $\text{mod } \frac{1}{\sqrt{2}}$.

В п. 1 выясняется, при каком условии применима теорема 7.2 гл. II, § 3. В п. 2, 3 и 4 эта теорема применяется при подходящих предположениях, все более и более сильных, которые окончательно сводятся к тому, что a есть оператор Шредингера — Клейна — Гордона. Таким образом, в конце концов получается теорема 4.1.

Замечание 0. А. Ворос (ср. [25] — [26]) заметил, что эти свойства уравнений Шредингера и Клейна — Гордона распространяются на случай электрического потенциала, который есть функция от одной переменной R с положительными значениями, если не требовать, чтобы уровень энергии E был действительным числом, а допускать в качестве его значений произвольное формальное число с нулевой фазой.

1. Коммутативность операторов a , a_{L^2} и a_M ,
ассоциированных с гамильтонианами H
(§ 1, п. 2), L^2 и M (§ 1, п. 1)

Выясним, когда к этим операторам применима теорема 7.2 гл. II, § 3, т. е. когда они коммутируют.

Лемма 1. 1) a_M и a (следовательно, в частности, a_M и a_{L^2}) коммутируют.

2) Операторы a_{L^2} и a коммутируют в том и только том случае, когда

$$\forall L, M, Q, R \quad H_{M^2Q} = H_{M^2R} = 0. \quad (1.1)$$

Доказательство. Пусть a и a' — лагранжевы операторы, ассоциированные с гамильтонианами H и H' . В силу формулы (1.1) гл. II, § 2 их коммутатор

$$a \circ a' - a' \circ a$$

ассоциирован с формальной функцией вида

$$-2 \sum_{r \in N} \frac{1}{(2r+1)!} \frac{1}{(2\nu)^{2r+1}} \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p'} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle \right]^{2r+1} H(x, p) H'(x', p') \Big|_{\substack{x'=x \\ p'=p}}. \quad (1.2)$$

Допустим, что H и H' находятся в инволюции, что будет иметь место для любых двух функций из H , определенной в § 1, п. 2, L^2 и M определенных в § 1, п. 1 (см. § 1, формула (1.3)). Первое слагаемое формулы (1.2) в этом случае $= 0$. Если H' — многочлен второй степени от x' и p' , то равны нулю и остальные слагаемые, т. е. a и a' коммутируют, откуда следует утверждение 1). Предположим теперь, что H' есть однородный многочлен четвертой степени относительно (x', p') . Тогда в силу (1.2) оператор $a \circ a' - a' \circ a$ ассоциирован с $\frac{1}{v^3} H''$, где H'' имеет вид

$$H''(x, p) = -\frac{1}{24} \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p'} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle \right]^3 H(x, p) H'(x', p') \Big|_{\substack{x'=x \\ p'=p}}.$$

Повторное применение формулы Тейлора показывает, что слагаемое $H'(x' + y, p' + q)$, которое однородно степени 1 относительно (x', p) и однородно степени 3 относительно (y, q) , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \left[\left\langle q, \frac{\partial}{\partial p'} \right\rangle + \left\langle y, \frac{\partial}{\partial x'} \right\rangle \right]^3 H'(x', p') = \\ = \left[\left\langle p', \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle + \left\langle x', \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \right] H'(y, q). \end{aligned}$$

Следовательно, если H' однородно степени 2 относительно обоих своих аргументов, то

$$H''(x, p) = -\frac{1}{4} \left[\left\langle p, H'_{p'} \left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\rangle - \left\langle x, H'_{x'} \left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\rangle \right] H(x, p).$$

В частности, для $H' = L^2$, т. е. $H'(x', p') = |x' \wedge p'|^2$,

$$H''(x, p) = \frac{1}{2} \left\langle p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle H(x, p). \quad (1.3)$$

Пары операторов, встречающиеся в этой формуле:

$$\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x} \right)_I, \quad \left(\frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x} \right)_I,$$

коммутируют друг с другом.

Оператор $\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x} \right)_I$ есть бесконечно малый поворот, действующий на x и p . Этот оператор переводит L , Q и R в нуль. Простое вычисление дает

$$\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x} \right) M(x, p) = x_3 p - p_3 x.$$

Предположим, что H — сложная функция от L, M, Q, R (§ 1, (2.1)); формула (1.3) примет тогда вид

$$H''(x, p) = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x}, H_M x_3 p - H_M p_3 x \right\rangle.$$

Для произвольной функции $F(x, p)$ обозначим

$$\mathcal{X}F = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ F_{x_1} & F_{x_2} & F_{x_3} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{P}F = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ F_{p_1} & F_{p_2} & F_{p_3} \end{vmatrix}.$$

Предыдущее выражение для H'' можно тогда переписать в виде

$$H''(x, p) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathcal{P}H_M - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_3} \mathcal{X}H_M.$$

Но линейные дифференциальные операторы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{P}$, очевидно, обращают в нуль P^2, Q и R^2 , следовательно, в силу формулы (1.2) § 1, и L^2 . Применение этих операторов к M дает

$$\mathcal{X}M = -\frac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial x_3}, \quad \mathcal{P}M = -\frac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial p_3}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}F$ функциональный определитель

$$\mathcal{D}F = \frac{\partial L^2}{\partial x_3} \frac{\partial F}{\partial p_3} - \frac{\partial L^2}{\partial p_3} \frac{\partial F}{\partial x_3},$$

тогда выражение для H'' можно записать в виде

$$H''(x, p) = \frac{1}{4} \mathcal{D}H_{M^2}.$$

Но линейный дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ обращает L и M в нуль, а применение его к Q и R дает

$$\frac{1}{2} \mathcal{D}Q = P^2 x_3^2 - R^2 p_3^2; \quad \frac{R}{2} \mathcal{D}R = Q x_3^2 - R^2 p_3 x_3.$$

Выражение для H'' принимает вид

$$H''(x, p) = \frac{1}{2} \left(P^2 H_{M^2 Q} + \frac{Q}{R} H_{M^2 R} \right) x_3^2 - \frac{R}{2} H_{M^2 R} p_3 x_3 - \frac{1}{2} R^2 H_{M^2 Q} p_3^2. \quad (1.4)$$

В силу п. 1 § 1 отношение p_3/x_3 не зависит от L, M, Q, R . Условие

$$\forall x, p \quad H''(x, p) = 0$$

эквивалентно, следовательно, (1.1), что и доказывает утверждение 2) леммы.

2. Случай оператора a , коммутирующего с a_{L^2} и a_M

Предположим, что удовлетворено условие (1.1). Лемма 1 показывает, что к лагранжевой системе

$$aU = (a_{L^2} - c_L)U = (a_M - c_M)U = 0 \pmod{\frac{1}{v^{r+2}}}, \quad r \geq 1, \quad (2.1)_r$$

применима теорема 7.2 гл. II, § 3; здесь c_L и c_M два формальных числа с нулевой фазой, таких, что

$$c_L - L_0^2 = c_M - M_0 = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}. \quad (2.2)$$

Выпишем выражения $a_{L^2}^+$ и a_M^+ для a_{L^2} и a_M в R_0 . В силу гл. I, § 1, п. 3 и в силу формулы

$$e^{\frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} L^2(x, p) = \left[1 + \frac{1}{2v} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle + \frac{1}{8v^2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle^2 \right] (P^2 R^2 - Q^2) = P^2 Q^2 - Q^2 - \frac{2}{v} Q - \frac{3}{2v^2}$$

имеем

$$a_{L^2}^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{v^2} \left(\Delta_0 - \frac{3}{2} \right), \quad (2.3)$$

где

$$\Delta_0 = R^2 \Delta - \sum_{j, k} x_j x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} - 2 \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Delta = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 \right). \quad (2.4)$$

В силу приведенного ниже выражения (2.24) для Δ_0 это есть сферический лапласиан, который действует на ограничение функции на сферу $R = \text{const}$. Далее

$$a_M^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{v} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right),$$

этот оператор есть инфинитезимальный поворот.

Потребуем, чтобы неизвестная функция U была определена $\text{mod } \frac{1}{v^{r+1}}$ на компактном лагранжевом многообразии V ; по теореме 3 § 1

i) V является одним из торов

$$V[L_0, M_0] = T(l, m, n); \quad H = L^2 - L_0^2 = M - M_0 = 0,$$

которые определены в п. 1) этой теоремы.

ii) Лагранжева амплитуда β_0 функции U постоянна. Если $\beta_0 = 0$, то $(2.1)_r$ сводится к $(2.1)_{r-1}$, поэтому наложим условие

$$\beta_0 = \text{const} \neq 0. \quad (2.5)$$

Назовем задачей (2.1), задачу решения системы (2.1), при условии (2.5) и условии, что V компактно.

Обозначения. Формула (3.16) той же теоремы 3 § 1 дает вид инвариантной меры η_V ; формулы (1.16) и (3.6) § 1 дают выражение d^3x ; формула (3.4) гл. I, § 3 определяет $\arg d^3x = \pi m_{R_0}$; m_{R_0} определено формулой (3.5) § 1, $\arg \eta_V = 0$ по определению; отсюда значение функции χ , которая определена и применялась в § 3 гл. III и значение ее аргумента

$$\chi = \frac{\eta_V}{d^3x} = [R^3 H_Q [L_0, M_0, Q, R] \sin \psi \sin \vartheta]^{-1}, \quad \text{где } \vartheta = \text{const}; \quad (2.6)$$

$\arg \chi = -\arg H_Q - \arg \sin \psi$, где $\arg H_Q = -\pi \left[\frac{1}{\pi} \arctg \frac{H_Q}{H_R} \right]$, $\arg \sin \psi = \pi \left[\frac{\psi}{\pi} \right]$ и $[\dots]$ означает целую часть от $\dots$. Особый контур V есть

$$\Sigma_{R_0}: H_Q \sin \psi = 0; \quad \chi: V \setminus \Sigma_{R_0} \rightarrow \mathbf{R}. \quad (2.7)$$

Пусть U — лагранжева функция на V с лагранжевой амплитудой

$$\beta_0 = \text{const} \neq 0.$$

Выражение этой функции в репере R_0 будет обозначаться

$$U_{R_0}(v) = \sqrt{\chi} \beta(v) e^{v\varphi_{R_0}}, \quad \text{где } \beta(v) = \sum_{s \in \mathbf{N}} \frac{\beta_s}{v^s}. \quad (2.8)$$

В силу теоремы 2.2 гл. II, § 2 о структуре и определения (3.2) (гл. II, § 2) лагранжевых функций функция

$$\chi^{-3s} \beta_s: V \rightarrow \mathbf{C}$$

регулярна даже на Σ_{R_0} .

Пусть D_H, D_L, D_M — такие операторы, что

$$\left. \begin{aligned} [aU]_{R_0} &= \frac{\sqrt{\chi}}{v} e^{v\varphi_{R_0}} D_H \beta; \\ [(a_{L^2} - L_0^2) U]_{R_0} &= \frac{\sqrt{\chi}}{v} e^{v\varphi_{R_0}} D_L \beta; \\ [(a_M - M_0) U]_{R_0} &= \frac{\sqrt{\chi}}{v} e^{v\varphi_{R_0}} D_M \beta. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

D_H, D_L и D_M коммутируют, потому что коммутируют a, a_{L^2} и a_M .

Введем на $V \setminus \Sigma_{R_0}$ локальные координаты (R, ψ, φ) .

Лемма 2.1. 1) При таком выборе локальных координат

$$D_M = \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.10)$$

2) Если U есть решение уравнения

$$(a_M - c_M)U = 0 \pmod{\frac{1}{v^{r+2}}}, \quad (2.11)$$

где c_M есть формальное число с нулевой фазой, такое, что

$$c_M = M_0 \pmod{\frac{1}{v^2}},$$

то

$$c_M = M_0 \pmod{\frac{1}{v^{r+2}}};$$

$\beta \pmod{\frac{1}{v^{r+1}}}$ есть функция только от R и ψ .

Доказательство. 1) Подсчитаем D_M с помощью теоремы 4 гл. II, § 3. Положим в этой теореме гамильтониан H равным $M - M_0$; в силу формул (3.18) § 1, уравнения характеристик этого гамильтониана имеют вид

$$dt = d\psi = 0, \quad \text{т. е.} \quad dR = d\psi = 0.$$

Параметром вдоль этой характеристики является φ , которое нужно подставить вместо t в эту теорему. Отсюда формула (2.10).

2) При $r = 0$ утверждение 2) очевидно. Пусть 2) верно, когда r заменено на $r - 1$. Тогда

$$c_M = M_0 + \frac{M_{r+1}}{v^{r+1}} \quad (M_{r+1} \in \mathbb{C}).$$

В силу (2.9) и (2.10) утверждение (2.11) эквивалентно тому, что

$$\frac{\partial \beta_r}{\partial \varphi} = M_{r+1} \beta_0, \quad \text{где} \quad \beta_0 = \text{const} \neq 0.$$

Но β_r есть функция φ , имеющая период 2π . Поэтому $M_{r+1} = 0$ и $\frac{\partial \beta_r}{\partial \varphi} = 0$, откуда следует 2).

Обозначения. В дальнейшем мы будем предполагать, что β зависит только от R и ψ . В силу (2.10) D_H и D_L коммутируют с $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ и поэтому действуют на функциях от (R, ψ) .

Лемма 2.2. 1) В локальных координатах (R, ψ, φ)

$$D_L \beta = 2L_0 \frac{d\tau}{d\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{v} F \right] \beta - \frac{5}{4v} \beta, \quad (2.12)$$

где

$$\tau = \operatorname{ctg} \psi;$$

F — оператор с полиномиальными коэффициентами, имеющий вид

$$F\beta = F_1\beta + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[F_2 \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \right],$$

F_1 и F_2 многочлены от τ , а именно:

$$F_1(\tau) = \frac{5M_0^2\tau^2 + L_0^2 + M_0^2}{8L_0(L_0^2 - M_0^2)}; \quad F_2(\tau) = \frac{(M_0^2\tau^2 + L_0^2)(\tau^2 + 1)}{2L_0(L_0^2 - M_0^2)}.$$

2) Пусть U — лагранжева функция, определенная на торе $V[L_0, M_0]$, с лагранжевой амплитудой $\beta_0 \neq 0$, удовлетворяющая системе

$$(a_L^2 - c_L)U = (a_M - M_0)U = 0 \quad \bmod \frac{1}{v^{r+2}}, \quad (2.13)$$

где c_L — формальное число с нулевой фазой, такое, что

$$c_L = L_0^2 \quad \bmod \frac{1}{v^2}.$$

Обозначим Σ множество точек кривой $\Gamma[L_0, M_0]$ (§ 1, (2.5)), на котором

$$\Sigma: H_Q = 0.$$

Тогда

$$c_L = L_0^2 - \frac{5}{4v^2} \bmod \frac{1}{v^{r+2}}, \quad (2.14)$$

$$\beta(v, R, \psi) = g(v, R) f(v, \tau) \bmod \frac{1}{v^{r+1}}. \quad (2.15)$$

Здесь g — произвольная формальная функция с нулевой фазой, определенная на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$, f определяется ниже.

3) Существует единственная формальная функция f , определенная на R , вида

$$f(v, \tau) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^s} f_s(\tau), \quad \tau \in R \quad (2.16)$$

такая, что

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{1}{v} Ff; \quad (2.17)$$

$$f_0 = 1, f_s \text{ — действительный многочлен от } \tau \text{ степени } 3s, \text{ имеющей ту же четность, что } s, \quad (2.18)$$

$$f\bar{f} = 1 + \frac{1}{v} F_2 \left(\bar{f} \frac{df}{d\tau} - f \frac{d\bar{f}}{d\tau} \right) \quad (2.19)$$

$[\bar{f}$ — комплексно-сопряженная с f функция].

Формула (2.19) выражает f_{2s} через $f_1, \dots, f_{2s-1}$. Всякое решение (2.17) $\text{mod } \frac{1}{v^r}$ есть $\text{mod } \frac{1}{v^r}$ произведение f на формальное число с нулевой фазой.

Замечание 2. U' — формальная функция от x , однородная нулевой степени, определенная при

$$M_0 R < L_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

формулой

$$U'(v, x) = \frac{f(v, \psi)}{\sqrt{\sin \psi}} e^{v(L_0 \psi + M_0 \varphi)}, \quad (2.20)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\frac{1}{v} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) U' = M_0 U'; \quad \frac{1}{v^2} \Delta U' = \frac{1}{R^2} \left(L_0^2 + \frac{1}{4v^2} \right) U'. \quad (2.21)$$

Доказательство. 1) Вычислим D_L с помощью теоремы 4 гл. II, § 3, в которой в качестве гамильтониана H взято $L^2 - L_0^2$; в силу формулы (3.17) § 1 характеристики этого гамильтониана имеют уравнения

$$dt = d\psi = 0, \quad \text{т. е.} \quad dR = d\varphi = 0.$$

Можно принять за параметр на этих характеристиках $\frac{\psi}{2L_0}$ и заменить этим параметром t в теореме 4. Правая часть формулы (4.5) в этой теореме должна быть заменена выражением

$$e^{\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle} L^2(x, p) = \left[1 + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle + \frac{1}{8} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle^2 \right] (P^2 R^2 - Q^2) = P^2 R^2 - Q^2 - 2Q - \frac{3}{2}.$$

Цитируемая теорема дает тогда

$$D_L \beta = 2L_0 \frac{\partial \beta}{\partial \psi} + \frac{1}{v} \left[\chi^{-\frac{1}{2}} \Delta_0 \left(\beta \chi^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{3}{2} \beta \right], \quad (2.22)$$

где Δ_0 определено формулой (2.4) в координатах (x_1, x_2, x_3) . Справедливы формулы

$$R \frac{\partial}{\partial R} = \sum_{j=1}^3 x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad R^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} = \sum_{j,k} x_j x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (2.23)$$

Поэтому определение (2.4) оператора Δ_0 может быть переписано в виде

$$\Delta_0 = R^2 \Delta - R^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} - 2R \frac{\partial}{\partial R}. \quad (2.24)$$

Но формулы (1.5) и (1.12) § 1 дают

$$\frac{x_3}{R} = -\sin \vartheta \cos \psi, \quad \text{где} \quad \cos \vartheta = \frac{M_0}{L_0}$$

в силу § 1, (1.11) отсюда на V имеем

$$\langle R_x, \psi_x \rangle = 0; \quad R^2 \langle \psi_x, \psi_x \rangle = 1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \vartheta}{\sin^2 \psi};$$

$$R^2 \Delta \psi = \operatorname{ctg} \psi \left(1 - \frac{\operatorname{ctg}^2 \vartheta}{\sin^2 \psi} \right).$$

Подставляем в формулу (2.24) полученное отсюда выражение $R^2 \Delta$ на функциях от R и ψ .

Мы получим тогда на этих функциях

$$\Delta_0 = \left(1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \vartheta}{\sin^2 \psi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \operatorname{ctg} \psi \left(1 - \frac{\operatorname{ctg}^2 \vartheta}{\sin^2 \psi} \right) \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (2.25)$$

Отсюда и из (2.6) с помощью простого подсчета получаем

$$\chi^{-\frac{1}{2}} \Delta_0 \left(\beta \chi^{\frac{1}{2}} \right) = \sqrt{\sin \psi} \Delta_0 \left(\frac{\beta}{\sqrt{\sin \psi}} \right) = -2L_0 \frac{d\tau}{d\psi} F\beta + \frac{1}{4} \beta. \quad (2.26)$$

Следовательно, из (2.22) следует (2.12).

2) В силу леммы 2.1 β локально зависит только от R и ψ . По этой лемме и формуле (2.12) β_0 есть функция только от R , не равная тождественно нулю.

При $r = 0$ утверждение 2) очевидно. Индукция по r позволяет предположить, что $\beta_0, \dots, \beta_{r-1}$ — многочлены от τ с коэффициентами, зависящими от R , и что 2) верно для $r-1$. Тогда

$$c_L = L_0^2 - \frac{5}{4v^2} + \frac{2L_0 L_{r+1}}{v^{r+1}} \pmod{\frac{1}{v^{r+2}}}. \quad L_{r+1} \in \mathbb{C}.$$

Уравнение (2.13)₁ запишется, следовательно, так:

$$\frac{1}{v} D_L \beta + \left(\frac{5}{4v^2} - \frac{2L_0 L_{r+1}}{v^{r+1}} \right) \beta = 0 \pmod{\frac{1}{v^{r+2}}}. \quad (2.27)$$

По предположению индукции это равенство справедливо $\pmod{\frac{1}{v^{r+1}}}$. В силу (2.12) оно может быть записано в виде

$$d\beta_r = (F\beta_{r-1}) d\tau + L_{r+1} \beta_0 d\psi \quad \text{при} \quad R = \text{const.}$$

Следовательно, так как F — оператор с полиномиальными коэффициентами, β_r есть сумма многочлена от $\tau = \operatorname{ctg} \psi$ и функции $L_{r+1} \beta_0 \psi$, где $\beta_0 \neq 0$. Но β_r есть функция ψ с периодом 2π . Следовательно,

$$L_{r+1} = 0, \quad \beta_r \text{ — многочлен от } \tau.$$

Формула (2.27) может быть записана так:

$$d\beta = \frac{1}{v} (F\beta) d\tau \pmod{\frac{1}{v^{r+1}}} \quad \text{для } R = \text{const},$$

откуда следует (2.15) при условии, что справедливо 3).

3) Условие, что функция (2.16) удовлетворяет уравнению (2.17) $\pmod{\frac{1}{v^r}}$, может быть записано так:

$$f_0 = \text{const}, \quad \frac{df_s}{d\tau} = Ff_{s-1} \quad \text{для } s = 1, \dots, r-1.$$

Следовательно, f_s есть многочлен от τ степени $3s$, содержащий произвольную постоянную интегрирования. Значит f определено с точностью до умножения на формальное число с нулевой фазой. Выберем постоянные интегрирования действительными, тогда f_r действительны. Существует единственный выбор постоянных интегрирования f_{2s-1} , таких, чтобы f_r имело четность числа r .

Доказательство (2.19). Пусть $\bar{f}$ — функция, комплексно-сопряженная к f . Так как v чисто мнимо и F действительно, то из (2.17) следует, что

$$\frac{d\bar{f}}{d\tau} = -\frac{1}{v} F\bar{f}; \quad \frac{d}{d\tau} (f\bar{f}) = \frac{1}{v} (\bar{f} Ff - f F\bar{f}),$$

т. е. в силу определения F

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (f\bar{f}) &= \frac{1}{v} \left[\bar{f} \frac{d}{d\tau} \left(F_2 \frac{df}{d\tau} \right) - f \frac{d}{d\tau} \left(F_2 \frac{d\bar{f}}{d\tau} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{v} \frac{d}{d\tau} \left[F_2 \left(\bar{f} \frac{df}{d\tau} - f \frac{d\bar{f}}{d\tau} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$f\bar{f} - \frac{1}{v} F_2 \left(\bar{f} \frac{df}{d\tau} - f \frac{d\bar{f}}{d\tau} \right) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{c_s}{v^s} \quad (c_0 = 1),$$

т. е. так как f_r действительны, $c_{2s+1} = 0$;

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \sum_{s'=0}^{2s} (-1)^{s'} f_{2s-s'} f_{s'} = 2F_2 \sum_{s'=0}^{2s-1} (-1)^{s'} f_{s'} \frac{d}{d\tau} f_{2s-1-s'} + c_{2s}.$$

Если $s > 0$, эта формула выражает f_{2s} через $f_1, \dots, f_{2s-1}$ и $c_{2s} \in \mathbb{R}$, причем при надлежащем выборе постоянной интегрирования f_{2s} , $c_{2s} = 0$.

Доказательство (2.19)₂. В силу (2.12) и (2.17)

$$D_L f = -\frac{5}{4v^2} f,$$

т. е., согласно определению (2.9) оператора D_L ,

$$\left[a_{L^2}^+ \left(v, x, \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) - L_0^2 + \frac{5}{4v^2} \right] (\sqrt{\chi} f e^{v\varphi_{R_0}}) = 0.$$

В силу выражения (2.3) для $a_{L^2}^+$, выражения (2.6) функции χ и того, что Δ_0 действует на ограничения функции на сферы $R = \text{const}$, а φ_R задается выражением (3.4) § 1, где Ω зависит только от R , будет удовлетворяться уравнение

$$\left(\frac{1}{v^2} \Delta_0 - L_0^2 - \frac{1}{4v^2} \right) U'(v, x) = 0,$$

где U' определено формулой (2.20), U' — однородная функция нулевой степени от x . Отсюда, пользуясь выражением (2.24) для Δ_0 , получаем (2.21)₂.

Доказательство (2.21)₁. Из определения (2.16) функции f и выражения (2.10) для D_M следует

$$D_M f = 0,$$

т. е. в силу определения (2.8) — (2.9) для D_M

$$(a_M^+ - M_0) (\sqrt{\chi} f e^{v\varphi_{R_0}}) = 0.$$

В начале п. 2 был вычислен оператор

$$a_M^+ = \frac{1}{v} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right).$$

a_M^+ переводит, следовательно, функции, зависящие только от R , в нуль. В силу выражения (2.6) для функции χ и выражения (3.4) § 1 для φ_{R_0} предыдущее выражение для a_M^+ эквивалентно, следовательно (2.21)₁.

Лемма 2.3. *Существует оператор D , действующий на формальные функции g , определенные на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$, такие, что*

$$D_H [f(v, \psi) g(v, R)] = f(v, \psi) Dg(v, R), \quad (2.28)$$

D имеет локальное выражение

$$D = \sum_{s \in N} \frac{1}{v^s} D_s \left(R, \frac{d}{dR} \right), \quad (2.29)$$

где $D_s \left(\frac{d}{dR} \right)$ — дифференциальный оператор, определенный на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$:

$$D_0 = R H_Q \frac{d}{dR} \quad (2.30)$$

Доказательство. Так как D_H коммутирует с оператором D_L , который задается выражением (2.12), то

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\psi} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{v} F \right) D_H [f(v, \psi) g(v, R)] &= \\ &= D_H \left[\frac{d\tau}{d\psi} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{v} F \right) f(v, \psi) g(v, R) \right] = 0 \end{aligned}$$

в силу леммы 2.2, 3). $D_H[fg]$ есть, следовательно, произведение f на формальную функцию, которая определена на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$ и которую мы обозначим Dg .

Из теоремы 4 гл. II, § 3 следует, что D_H имеет вид

$$D_H = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^s} D_{H,s} \left(R, \psi, \frac{\partial}{\partial R}, \frac{\partial}{\partial \psi} \right),$$

где $D_{H,s}$ — дифференциальные операторы. Отсюда следует, что оператор D имеет вид (2.29).

Так как характеристики H удовлетворяют уравнениям (2.14) § 1, то из этой же теоремы следует, что

$$D_H(fg) dt = d(fg) \pmod{\frac{1}{v}}, \text{ если } dR = RH_Q dt, d\psi = H_L dt.$$

Но $f = 1 \pmod{\frac{1}{v}}$, следовательно,

$$D_H g = RH_Q \frac{dg}{dR} \pmod{\frac{1}{v}}.$$

Это равенство эквивалентно (2.30).

Теорема 2. 1) Задача $(2.1)_r$, поставленная в начале этого п. 2, имеет решение, только если

$$c_L = L_0^2 - \frac{5}{4v^2}, \quad c_M = M_0.$$

2) Эта задача $(2.1)_r$ эквивалентна следующей задаче: определить на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma \pmod{\frac{1}{v^{r+1}}}$ формальную функцию

$$g(v) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^s} g_s \quad (g_0 = 1, g_s: \Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma \rightarrow \mathbb{C}),$$

удовлетворяющую условиям

$$\left. \begin{aligned} Dg &= 0 \pmod{\frac{1}{v^{r+1}}}, \\ (H_Q)^{3r} g &\text{ регулярна } \pmod{\frac{1}{v^{r+1}}} \text{ на } \Gamma[L_0, M_0]. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)_r$$

Всякая формальная функция, удовлетворяющая условиям (2.31)_r, есть mod $\frac{1}{v^{r+1}}$ произведение g на формальное число с нулевой фазой.

Условие, что g есть решение (2.31)_r, эквивалентно, очевидно, следующему:

g есть решение задачи (2.31)_{r-1};

$$\left. \begin{aligned} RH_Q \frac{dg_r}{dR} + \sum_{s=1}^r D_s g_{r-s} &= 0 \text{ на } \Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma, \\ (H_Q)^{3r} g_r &\text{ регулярно на } \Gamma[L_0, M_0]. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Пусть Ω определена формулой (2.8) § 1. Определим тогда на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$ формальную функцию

$$U''(v) = \frac{ge^{v\Omega}}{\sqrt{R^3 H_Q}}.$$

Тогда $U'(v)U''(v)$ есть выражение U_{R_0} для решения U задачи (2.1)_r. Всякое решение системы (2.1)_r, определенное на $V[L_0, M_0]$, есть mod v^{r+1} произведение этого решения на формальное число.

3) Предположим, что g есть решение задачи (2.31)_{r-1}, тогда существует функция $g_r: \tilde{\Gamma}[L_0, M_0] \setminus \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая (2.32)_r, если Γ заменено своим универсальным накрытием $\tilde{\Gamma}$; g_r определено с точностью до аддитивной постоянной. Условие того, что g_r определена на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$, эквивалентно разрешимости задач (2.1)_r, или, что все равно, (2.31)_r.

Доказательство. 1) Леммы 2,1, 2) и 2,2, 2).

2) Формулы (2.6), (2.8), леммы 2,1, 2), 2,2, 2) и 2.3, теоремы 5 и 7.2 гл. II, § 3.

3) Эти же теоремы.

3. Более специальный случай

Чтобы уточнить доказанную только что теорему 2, положим, как в § 1, п. 4

$$H[L, M, Q, R] = \frac{1}{2} \left\{ P^2 - \frac{1}{R^2} K[R, M] \right\} = \frac{1}{2R^2} \{ L^2 + Q^2 - K[R, M] \}. \quad (3.1)$$

Предположим, что K — аффинная функция от M , условие (1.1) удовлетворяется. В силу § 1 (4.5) оператор, ассоцииро-

ванный с H , имеет в R_0 выражение

$$a = \frac{1}{2v^2} \Delta - \frac{1}{2R^2} K \left[R, \frac{1}{v} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right], \quad (3.2)$$

$$L_0^2 + Q^2 - K[R, M_0] = 0 \text{ на кривой } \Gamma[L_0, M_0]; \quad (3.3)$$

Σ — множество точек этой кривой, в которых $Q = 0$.

Лемма 3. Оператор D имеет следующее выражение:

$$D = \frac{Q}{R} \left[\frac{d}{dR} - \frac{1}{v} G \right], \quad (3.4)$$

где G действует на функциях

$$g: \Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$$

и имеет вид

$$Gg = G_1 g + \frac{d}{dR} \left[G_2 \frac{dg}{dR} \right], \quad (3.5)$$

G_1 и G_2 — функции, определенные на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$,

$$G_1(R, Q) = \frac{G_3(R)}{Q^5}; \quad G_2(R, Q) = -\frac{1}{2} \frac{R}{Q}, \quad (3.6)$$

где

$$G_3(R) = -\frac{5}{32} R (K_P)^2 + \frac{1}{8} (K - L_0^2) (K_R - R K_{R^2}).$$

Доказательство. Выражение для оператора D получается с помощью теоремы 4 гл. II, § 3. В формуле (4.5) этой теоремы $s = 2$ и

$$e^{\frac{1}{2} \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \rangle} H^{(2)}(x, p) = e^{\frac{1}{2} \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \rangle} \frac{1}{2} P^{(2)} = \frac{1}{2} P^2. \quad (3.7)$$

Уравнения характеристик (§ 1, уравнения (2.14)) дают

$$dR = \frac{Q}{R} dt, \quad d\psi = \frac{L_0}{R^2} dt. \quad (3.8)$$

В силу определения (2.9) для D_H , если β зависит только от координат (R, ψ) многообразия V , эта теорема дает

$$D_H \beta dt = d\beta + \frac{1}{2v} \chi^{-\frac{1}{2}} \Delta \left(\beta \chi^{\frac{1}{2}} \right) dt$$

для dt , dR и $d\psi$, связанных уравнениями (3.8). То есть

$$D_H \beta = \frac{d\beta}{dR} \frac{Q}{R} + \frac{d\beta}{d\psi} \frac{L_0}{R^2} + \frac{1}{2v} \chi^{-\frac{1}{2}} \Delta \left(\beta \chi^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.9)$$

В силу (2.6)

$$\chi = [QR \sin \psi \sin v]^{-1}, \quad v = \text{Const},$$

Следовательно, по определению (2.24) оператора Δ_0 , который действует на ограничения функций на сферы $R = \text{const}$,

$$\chi^{-\frac{1}{2}} \Delta \left(\beta \chi^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{R^2} \sqrt{\sin \psi} \Delta_0 \left(\frac{\beta}{\sqrt{\sin \psi}} \right) + \\ + \sqrt{QR} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) \left(\frac{\beta}{\sqrt{QR}} \right).$$

Заменяем Δ_0 его выражением (2.26) и подставим результат в (3.9). Мы получим

$$D_H \beta = \frac{Q}{R} \frac{\partial \beta}{\partial R} + \frac{\sqrt{QR}}{2\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) \left(\frac{\beta}{\sqrt{QR}} \right) + \\ + \frac{L_0}{R^2} \frac{d\tau}{d\psi} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\nu} F \right) \beta + \frac{1}{8\nu} \frac{\beta}{R^2}.$$

Выберем

$$\beta(\nu, R, \psi) = f(\nu, \psi) g(\nu, R),$$

где f — формальная функция от ψ , определенная в лемме 2.2, g — формальная функция, определенная на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$. Согласно лемме 2.3, мы получаем

$$D_H(fg) = f Dg,$$

где

$$Dg = \frac{Q}{R} \left[\frac{dg}{dR} + \frac{1}{2\nu} \frac{1}{\sqrt{QR}} \left(R^2 \frac{d^2}{dR^2} + 2R \frac{\partial}{\partial R} \right) \left(\frac{g}{\sqrt{QR}} \right) + \frac{1}{8\nu} \frac{g}{QR} \right].$$

Элементарным вычислением отсюда получается выражение (3.4) для D , где G задается формулой (3.5), в которой

$$G_1 = \frac{1}{4} \frac{d}{dR} \left[\frac{R}{Q^2} \frac{dQ}{dR} \right] + \frac{1}{8} \frac{R}{Q^3} \left(\frac{dQ}{dR} \right)^2, \quad G_2 = -\frac{1}{2} \frac{R}{Q}.$$

Но в силу уравнения (3.3) для $\Gamma[L_0, M_0]$ мы имеем

$$Q^2 = K[R, M_0] - L_0^2,$$

откуда получается выражение (3.6) для G_1 .

Предыдущая лемма позволяет выяснить свойства задачи (2.3)_r, к которой теорема 2 свела задачу (2.1)_r.

Определение 3. Функция $g: \Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ называется четной или нечетной, если

$$\forall \pm Q, R \in \Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma, \quad g(Q, R) = \pm g(-Q, R).$$

Теорема 3.1 (дополнение к теореме 2). Пусть справедливо предположение (3.1).

1) Если задача (2.31)_r имеет решение g , такое, что $g_0 = 1$, то она имеет единственное решение, такое, что $g_0 = 1$, g_s дей-

ствительно и имеет четность s ($s \leq r$):

$$g\bar{g} = 1 - \frac{1}{2v} \frac{R}{Q} \left(\bar{g} \frac{dg}{dR} - g \frac{d\bar{g}}{dR} \right) \pmod{\frac{1}{v^{r+1}}}. \quad (3.10)$$

Формула (3.10) означает, что для $2 \leq 2s \leq r$

$$\sum_{s'=0}^{2s} (-1)^{s'} g_{2s-s'} g_{s'} = -\frac{R}{Q} \sum_{s'=0}^{2s-1} (-1)^{s'} g_{s'} \frac{d}{dR} g_{2s-1-s'}; \quad (3.11)$$

она выражает g_{2s} через $g_1, \dots, g_{2s-1}$.

2. Если задача $(2.31)_{2s-1}$ имеет решение, то задача $(2.31)_{2s}$ также имеет решение.

Замечание 3. Формальная функция U'' , определенная на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$ в теореме 2, 2), имеет, очевидно, выражение

$$U''(v) = \frac{g(v)}{\sqrt{QR}} e^{v\Omega}; \quad (3.12)$$

она удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{v^2} \Delta U''(v, R) = \frac{1}{R^2} \left\{ K[R, M_0] - L_0^2 - \frac{1}{4v^2} \right\} U''(v, R), \quad (3.13)$$

где $\Delta = \frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d}{dR}$ — лапласиан.

Доказательство. 1) Предположим, что 1) доказано для $r-1$, и предположим, что задача $(2.31)_r$ разрешима; в силу теоремы 2, 2) и леммы 3 g_r определена с точностью до постоянной интегрирования условиями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg_r}{dR} &= Gg_{r-1} \text{ на } \Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma, \\ Q^{3r} g_r &\text{ регулярно на } \Gamma[L_0, M_0]. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)_r$$

Но G изменяет четность: если r нечетно, то подходящий выбор постоянной интегрирования позволяет выбрать g_r действительной и нечетной; если r четно, то g_r четно и может быть выбрана действительной. Мы имеем

$$\frac{dg}{dR} = \frac{1}{v} Gg \pmod{\frac{1}{v^{r+1}}}; \quad Gg = G_1 g + \frac{d}{dR} \left[G_2 \frac{dg}{dR} \right].$$

Вычисление, аналогичное доказательству (2.19), выводит отсюда (3.10) с точностью до добавления формального числа $\sum_s \frac{c_s}{v^s}$, которое можно считать равным нулю, за счет подходящего выбора постоянных интегрирования g_{2s} .

2) Предположим, что $r = 2s$ четно и задача $(2.31)_{2s-1}$ разрешима в силу теоремы 2, 3), задача $(3.14)_{2s}$ имеет решение g_{2s} на универсальной накрывающей $\tilde{\Gamma}$ многообразия Γ . Доказательство формулы (3.11) остается в силе. Но формула (3.11) доказывает, что g_{2s} определено на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$; следовательно, g_{2s} — решение задачи $(3.14)_{2s}$.

Доказательство замечания 3. В виду выражения (3.2) для оператора a и теоремы 2, 2)

$$\left\{ \frac{1}{v^2} \Delta - \frac{1}{R^2} K \left[R, \frac{1}{v} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right] \right\} [U'(v, x) U''(v, x)] = 0,$$

где U' — однородная функция нулевой степени от x и U'' зависит только от R , откуда следует, что

$$\Delta(U' \cdot U'') = U' \cdot \Delta U'' + U'' \cdot \Delta U'.$$

Отсюда в силу $(2.21)_2$ следует (3.13).

Обозначения. Пусть $[R_1, R_2] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ — множество значений, которые принимает R на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$. Пусть, далее, ω — связная окрестность замкнутого действительного отрезка $[R_1, R_2]$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Теорема 3.2. Предположим, что K голоморфна в ω . Определим с помощью формулы (3.3) функцию Q , голоморфную в $\mathbb{C} \setminus [R_1, R_2]$.

1) Если задача $(2.31)_{2s}$ имеет решение g , то

$$\forall r \leq 2s \quad Q^{3r} g_r(Q, R) = (-Q)^{3r} g_r(-Q, R)$$

есть значение в точке R функции от R , голоморфной в ω . В частности, g_{2s} есть функция от R , мероморфная в ω с полюсами R_1 и R_2 .

2) Задача $(2.31)_{2s+1}$ разрешима; при этом задача $(2.31)_{2s+2}$ разрешима в том и только том случае, если первообразная функция от $(Gg_{2s})dR$ определена (т. е. однозначна) в $\omega \setminus [R_1, R_2]$.

Доказательство. Допустим, что 1) верно при некотором s (для $s = 0, 1$) очевидно). Тогда в силу (3.14) функция $g_{2s+1}: \tilde{\Gamma}[L_0, M_0] \setminus \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ есть, очевидно, значение принимаемое первообразной от $(Gg_{2s})dR$, определенной на универсальном накрытии области $\omega \setminus [R_1, R_2]$. Очевидно, что g_{2s+1} определена на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$ тогда и только тогда, когда эта первообразная определена на $\omega \setminus [R_1, R_2]$.

Предположим, что это условие выполнено.

Тогда при надлежащем выборе постоянной интегрирования эта первообразная g_{2s+1} в окрестности R_1 и R_2 есть нечетная

мероморфная функция от Q . Она, как Q , принимает значения противоположных знаков в двух граничных точках отрезка $[R_1, R_2]$.

Для R , близких к R_1 или R_2 , Q близко к нулю, g_{2s} — четная функция от Q , имеющая при $Q = 0$ полюс порядка $6s$. В силу (3.3), (3.5), (3.6) и (3.14)

$$\frac{dg_{2s+1}}{dQ} = \frac{dR}{dQ} G g_{2s} = 2 \frac{G_3}{K_R} g_{2s} \frac{1}{Q^4} - \frac{1}{4} \frac{d}{dQ} \left[\frac{RK_R}{Q^2} \frac{dg_{2s}}{dQ} \right],$$

где $K_R \neq 0$. Таким образом, g_{2s+1} есть локально нечетная функция от Q , имеющая при $Q = 0$ полюс порядка $3(2s + 1)$. Следовательно, $Q^{3(2s+1)}g_{2s+1}$ голоморфна на ω .

Формула (3.11) определяет g_{2s+2} ; $Q^{3(2s+2)}g_{2s+2}$ голоморфна на ω . Следовательно, 1) остается верным при замене s на $s + 1$.

4. Случай Шредингера — Клейна — Гордона

Для того чтобы доказать для любого r разрешимость задачи $(2.1)_r$, которую мы свели к задаче $(2.31)_r$, необходима, очевидно, подходящая гипотеза.

Нам удалось доказать эту теорему только при следующем предположении: K есть многочлен второй степени от R :

$$K[R, M] = -R^2 A(M) + 2RB(M) - C(M),$$

т. е. выражение оператора a в R_0 совпадает с оператором Шредингера — Клейна — Гордона (§ 1, п. 4), A, B и C — аффинные функции от M .

Тогда в теореме 3.2 $\omega = \mathbf{C}$, в определении (3.5) оператора G G_3 есть многочлен третьей степени от R , G_1 и G_2 — функции от R , голоморфные в $\mathbf{C} \setminus [R_1, R_2]$ и на бесконечности. При этих условиях первообразная функция от $(Gg)dR$ также обладает этими свойствами. Все g_r , следовательно, существуют, голоморфны в $\mathbf{C} \setminus [R_1, R_2]$ и на бесконечности, где G_1 имеет нуль 2-го порядка. Так как g_r голоморфна на бесконечности и $Q^{3r}g_{3r}$ голоморфна в $\mathbf{C}$, $Q^{3r}g_r$ есть многочлен степени $3r$ от R .

Мы доказали, таким образом, две следующие теоремы:

Теорема 4.1 (существование и единственность). Пусть оператор a в репере R_0 есть оператор Шредингера — Клейна — Гордона (§ 1, пример 4.1).

1) Условие того, что лагранжева система

$$aU = (a_{L^2} - c_L)U = (a_M - c_M)U = 0, \quad (4.1)$$

где c_L и c_M два формальных числа, таких, что

$$c_L - L_0^2 = c_M - M_0 = 0 \left(\text{mod } \frac{1}{v^2} \right) \quad (4.2)$$

имеет решение, определенное на компактном лагранжевом многообразии V , таково:

$$i) c_L = L_0^2 + \frac{1}{4\nu^2}, \quad c_M = M_0.$$

ii) V есть один из лагранжевых торов $V[L_0, M_0] = T(l, m, n)$, определенных в теореме 4.1 § 1.

2) Существует лагранжево решение U задачи (4.1), определенное на таком торе V и имеющее лагранжеву амплитуду

$$\beta_0 = 1.$$

Всякое лагранжево решение задачи (4.1), определенное на V , есть произведение U на формальное число с нулевой фазой.

Замечание 4.1. Проекция V на X есть

$$V_X: R_1 \leq |x| \leq R_2, \quad M_0 |x| \leq L_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

где R_1 и R_2 — два корня уравнения

$$A_0 R^2 - 2B_0 R + C_0 + L_0^2 = 0$$

(A_0, B_0, C_0 — значения A, B, C в M_0).

Теорема 4.2 (структура решений). Существует единственное решение U задачи (4.1), определенное на таком торе V и имеющее следующую структуру.

Выражение этого решения в репере R_0 имеет вид

$$U_{R_0}(\nu, x) = U'(\nu, x) U''(\nu, x), \quad (4.3)$$

где U' есть однородная формальная функция нулевой степени от x , определенная на V_X и удовлетворяющая уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\nu} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) U'(\nu, x) &= M_0 U'(\nu, x), \\ \frac{1}{\nu^2} \Delta U'(\nu, x) &= \frac{1}{R_2} \left(L_0^2 + \frac{1}{4\nu^2} \right) U'(\nu, x). \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

U'' есть формальная функция от R , удовлетворяющая уравнению

$$\frac{1}{\nu^2} \Delta U''(\nu, x) = \frac{1}{R^2} \left\{ K[R, M_0] - L_0^2 - \frac{1}{4\nu^2} \right\} U''(\nu, x); \quad (4.5)$$

U' и U'' определены формулами:

$$\left. \begin{aligned} U'(\nu, x) &= \frac{f(\nu, \tau)}{\sqrt{\sin \psi}} e^{\nu(L_0 \psi + M_0 \varphi)}, \\ U''(\nu, x) &= \frac{g(\nu, Q, R)}{\sqrt{QR}} e^{\nu \Omega}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где $\tau = \operatorname{ctg} \psi$ и где Ω есть функция R , определенная формулой (2.8) § 1; $\arg \sin \psi$ и $\arg Q$ имеют скачки $+\pi$ в точках $\psi = 0 \pmod{\pi}$ и соответственно $Q = 0$ на $\Gamma[L_0, M_0]$, где $\Gamma[L_0, M_0]$ ориентирована так, что $d\psi > 0$ и $QdR > 0$;

$$f(v) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} f_r \quad \text{и} \quad g(v) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{v^r} g_r$$

— формальные функции с нулевой фазой, определенные соответственно на действительной прямой $\mathbb{R}$ и на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$ следующими уравнениями:

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{1}{v} Ff, \quad \frac{dg}{dR} = \frac{1}{v} Gg, \quad (4.7)$$

где дифференциальные операторы F и G имеют вид

$$Ff = F_1 f + \frac{d}{d\tau} \left[F_2 \frac{df}{d\tau} \right], \quad Gg = G_1 g + \frac{d}{dR} \left[G_2 \frac{dg}{dR} \right]. \quad (4.8)$$

Здесь F_1 и F_2 — четные многочлены от τ 2-й и 4-й степени, определенные леммой 2.2, 1); $Q^5 G_1$ и $Q G_2$ — многочлены от R степени 3 и 1, определенные формулой (3.6); $f_0 = 1$, $g_0 = 1$, функции f_r и g_r действительны и имеют четность индекса

$$\begin{aligned} f\bar{f} &= 1 + \frac{1}{v} F_2 \left(\bar{f} \frac{df}{d\tau} - f \frac{d\bar{f}}{d\tau} \right); \\ g\bar{g} &= 1 + \frac{1}{v} G_2 \left(\bar{g} \frac{dg}{dR} - g \frac{d\bar{g}}{dR} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Эти формулы (4.9) позволяют дать явное выражение четных функций f_{2s} и g_{2s} через $f_1, \dots, f_{2s-1}$ и $g_1, \dots, g_{2s-1}$ соответственно; нечетные функции f_{2s+1} и g_{2s+1} определяются с помощью квадратур из условий

$$df_{2s+1} = (Ff_{2s}) d\tau, \quad dg_{2s+1} = (Gg_{2s}) dR,$$

f_r есть многочлен от τ степени $3r$, $Q^{3r} g_r$ есть многочлен от R степени $3r$.

Замечание 4.1. $g_{2s+1} - G_2 \frac{dg_{2s}}{dR}$ есть, следовательно, нечетная функция на $\Gamma[L_0, M_0] \setminus \Sigma$, первообразная от дифференциальной формы $G_1 g_{2s} dR$. Эта форма имеет вид $\frac{\Pi'(R)}{Q^{6s+5}} dR$, где Π' — многочлен степени $6s + 3$. В силу предыдущей теоремы эта первообразная имеет вид $\frac{\Pi(R)}{Q^{6s+5}}$, где Π — многочлен степени $6s + 3$.

Дадим непосредственное доказательство этого существенного факта,

Лемма 4.2. $\forall s \in \mathbb{N}$ дифференцирование

$$\frac{d}{dR} \frac{\Pi(R)}{Q^{2s+1}} = \frac{\Pi'(R)}{Q^{2s+3}} \quad (4.10)$$

(где Q_2 — многочлен 2-й степени от R ; $\text{discr } Q = 0$) определяет автоморфизм $\Pi \mapsto \Pi'$ векторного пространства многочленов степени $2s + 1$.

Доказательство. Пусть Π — многочлен степени $2s + 1$, $\Pi(R)Q^{-2s-1}$ — функция, голоморфная на бесконечности, где ее производная имеет, следовательно, нуль второго порядка. Следовательно, (4.10) определяет многочлен Π' степени $2s + 1$.
Отображение

$$\Pi \mapsto \Pi'$$

есть, следовательно, эпиморфизм векторного пространства конечной размерности. Но это, очевидно, и мономорфизм. Следовательно, это изоморфизм.

Заключение. В этом параграфе мы искали для $\dim X = 3$ лагранжеву систему с одной скалярной неизвестной функцией, имеющую решение на компактном лагранжевом многообразии, единственное с точностью до множителя. Найдена система такого типа: система, применяемая в волновой механике частиц без спина.

Замечание 4.2. Заменяя гамильтониан Шредингера — Клейна — Гордона гамильтонианом гармонического осциллятора в E^3

$$H(x, p) = \frac{1}{2\mu} [P^2 + AR^2 - 2B],$$

т. е. полагая

$$K[R, M] = -AR^4 + 2BR^2,$$

где A и B — аффинные функции M , мы получаем другую лагранжеву систему того же типа. Это можно доказать вычислениями, аналогичными предыдущим, с заменой R на R^2 . Уровни энергии получаются те же, что в волновой механике.

Замечание 4.3. Известно, что изучение гармонического осциллятора в R является более простым. Это изучение дает в E^3 другие лагранжевы решения уравнения, связанного с гармоническим осциллятором в случае, когда A и B не зависят от M . Однако уровни энергии остаются теми же самыми.

§ 4. УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШРЕДИНГЕРА—КЛЕЙНА—ГОРДОНА

0. Введение

Назовем задачей (0.1) следующую классическую задачу:
найти ненулевые функции

$$u: E^3 \rightarrow C,$$

которые вместе со своим градиентом суммируемы в квадрате и являются решениями уравнения в частных производных

$$au = 0. \quad (0.1)$$

Здесь a есть дифференциальный оператор, ассоциированный с гамильтонианом

$$H[L, M, Q, R] = \frac{1}{2} \left\{ P^2 - \frac{1}{R^2} K[R, M] \right\}, \quad (0.2)$$

где K — аффинная функция от M (ср. § 3, (3.1) и (3.2)); этот оператор определяется с помощью подстановки $v_0 = \frac{i}{\hbar}$ вместо v в лагранжев оператор, ассоциированный с H (формула (4.5) § 1). Он имеет, следовательно, вид

$$a = \frac{1}{2v_0^2} \Delta - \frac{1}{2R^2} K \left[R, \frac{1}{v_0} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right]. \quad (0.3)$$

В п. 2 будет предполагаться (ср. § 3, п. 4)

$$K[R, M] = -R^2 A(M) + 2RB(M) - C(M), \quad (0.4)$$

где A, B, C — аффинные функции M . В этом случае a есть оператор Шредингера — Клейна — Гордона. В § 4 будет дано краткое напоминание классического решения задачи (0.1). Это делается, чтобы

i) установить формальные аналогии между решением классической задачи и решением лагранжевой задачи ((2.1) § 3), а именно: найти решение системы

$$aU = (a_{L^2} - c_L)U = (a_M - c_M)U = 0$$

на компактном многообразии V .

ii) установить, что условия существования решения этой лагранжевой задачи (решения $\text{mod } \frac{1}{v^2}$ ср. (3.1) § 1) для уравнения Шредингера — Клейна — Гордона оказываются теми же, что условия существования решения классической задачи (0.1).

Предположение (0.4) является при этом существенным.

Замечание 0. Уравнение Шредингера — Клейна — Гордона при надлежащем выборе A , B и C обращается в уравнение Шредингера (4.21) § 1 или в уравнение Клейна — Гордона (4.22) § 1, где опущены члены порядка $\mathcal{H}^2$. Обычно к членам этого уравнения, линейным относительно $\mathcal{H}$, применяется теория возмущений. Мы не будем этого делать; мы изучим задачу (0.1) без упрощений, чтобы доказать, что утверждение ii) точное.

1. Изучение задачи (0.1) без предположения (0.4)

Напомним свойства сферических гармонических функций $u'_{l,m}$. Множество многочленов от $x \in E^3$, гармоничных и однородных степени l , есть векторное пространство размерности $2l+1$ над C . Оно имеет в качестве базы многочлены

$$R^l u'_{l,m} \quad (l \text{ и } m \text{ целые } |m| \leq l),$$

где $u'_{l,m}$ — однородные функции нулевой степени и удовлетворяют условиям:

$$R^2 \Delta u' = \Delta_0 u', \quad \text{см. (2.4) и (2.24) § 3}$$

$$\begin{aligned} \Delta u'_{l,m} + \frac{1}{R^2} l(l+1) u'_{l,m} &= 0, \\ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) u'_{l,m} &= i m u'_{l,m}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Пусть S^2 — единичная сфера в E^3 и σ — ее мера.

$$\int_{S^2} \left| \frac{\partial}{\partial x} u'_{l,m} \right|^2 \sigma = l(l+1) \int_{S^2} |u'_{l,m}|^2 \sigma.$$

Для всех $(l_1, m_1) \neq (l_2, m_2)$

$$\int_{S^2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} u'_{l_1, m_1}, \frac{\partial}{\partial x} u'_{l_2, m_2} \right\rangle \sigma = \int_{S^2} u'_{l_1, m_1} \cdot u'_{l_2, m_2} \sigma = 0;$$

здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть билинейное скалярное произведение. Ограничения $u'_{l,m}$ на S^2 образуют полную систему функций на S^2 . Всякая функция $u: E^3 \rightarrow C$, которая вместе со своим градиентом суммируема в квадрате, может быть единственным образом разложена в ряд

$$u = \sum_{l,m} u'_{l,m} u''_{l,m},$$

где $u''_{l,m}$ — функции только от $R > 0$, такие, что

$$\int_{\mathbb{E}^3} |u|^2 d^3x = \sum_{l,m} \int_{S^2} |u'_{l,m}|^2 \sigma \int_0^\infty R^2 |u'_{l,m}|^2 dR < \infty,$$

$$\int_{\mathbb{E}^3} \left| \frac{\partial}{\partial x} u \right|^2 d^3x = \sum_{l,m} \int_{S^2} \left| \frac{\partial}{\partial x} u'_{l,m} \right|^2 \sigma \cdot \int_0^\infty |u''_{l,m}|^2 dR +$$

$$+ \sum_{l,m} \int_{S^2} |u'_{l,m}|^2 \sigma \cdot \int_0^\infty R^2 \left| \frac{du''_{l,m}}{dR} \right|^2 dR < \infty.$$

Решение задачи (0.1). Условие того, что ряд для u является решением задачи (0.1), в силу (0.3) и (1.1) имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d}{dR} \right) u''_{l,m}(R) + \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\hbar^2} K[R, \hbar m] - l(l+1) \right\} u''_{l,m}(R) = 0, \quad (1.2)$$

откуда, обозначая $Ru''_{l,m} = V$, имеем, очевидно:

Теорема 1.1. *Задача (0.1) эквивалентна следующей. Найти целые числа l, m и ненулевые функции $V:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, такие, что $|m| \leq l$:*

$$\frac{d^2 V}{dR^2} + \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\hbar^2} K[R, \hbar m] - l(l+1) \right\} V = 0, \quad (1.3)$$

$$\int_0^\infty \left(1 + \frac{1}{R^2} \right) V^2 dR < \infty, \quad \int_0^\infty \left(\frac{dV}{dR} \right)^2 dR < \infty. \quad (1.4)$$

Замечание 1.1. Задача (0.1), следовательно, разрешима тогда и только тогда, когда разрешима такая задача: найти два целых числа l, m и функцию $u: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, суммируемую в квадрате со своим градиентом, такие, что

$$|m| \leq l,$$

$$au = 0, \quad \Delta_0 u + l(l+1)u = 0, \quad \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) u = imu. \quad (1.5)$$

Напомним, что система (1.5) играет существенную роль в физике.

Замечание 1.2. Уравнения (1.1), (1.2) и система (1.5) получаются формально, если заменить

$$v, U', U'', U$$

через

$$\frac{i}{\hbar}, u'_{l,m}, u''_{l,m}, u$$

в уравнениях (2.21), (3.13) и системе (2.1) § 3 с учетом теоремы 3 § 1 и теоремы 2 § 3, которые требуют, чтобы

$$L_0 = \hbar \left(l + \frac{1}{2} \right); \quad M_0 = \hbar m; \quad c_L = L_0^2 - \frac{5}{4\nu^2}; \quad c_M = M_0,$$

т. е. в силу формулы (2.3) § 3

$$\begin{aligned} a_{L^2}^+ - c_L &= \frac{1}{\nu^2} \Delta_0 - \hbar^2 \left[l + \frac{1}{2} - \frac{i}{2\nu\hbar} \right] \left[l + \frac{1}{2} + \frac{i}{2\nu\hbar} \right] = \\ &= -\hbar^2 [\Delta_0 + l(l+1)] \quad \text{для } \nu = \frac{i}{\hbar}, \end{aligned}$$

$$a_M^+ - c_M = \frac{1}{\nu} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - \hbar m.$$

Предположим, что K — голоморфная функция от R при $R = 0$. Обозначим

$$C_0 = -K[0, \hbar m], \quad \gamma = \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + C_0 \hbar^{-2}}. \quad (1.6)$$

Теорема Фукса показывает, что можно построить два независимых решения уравнения (1.3). Если 2γ не целое число, то их частное от деления соответственно на $R^{\pm\gamma+\frac{1}{2}}$ голоморфно при $R = 0$. Если γ чисто мнимо, то всякое ненулевое решение (1.3) приводит к расходимости в точке $R = 0$ интегралов (1.4). То же самое будет при $\gamma = 0$ (ср. Фукс). Предположим $\gamma > 0$; решение V задачи (1.3), которое есть произведение $R^{\gamma+\frac{1}{2}}$ на голоморфную функцию, дает сходящийся интеграл (1.4). Другие решения (1.3) дают расходящиеся интегралы (ср. Фукс). Следовательно, так как задача (1.3) эквивалентна задаче (0.1), то верна

Теорема 1.2. Если функция K голоморфна в начале координат, то разрешимость задачи (0.1) эквивалентна разрешимости следующей задачи: найти два целых числа m и l , таких, что

$$|m| \leq l, \quad \gamma > 0,$$

для которых решение V задачи (1.3) обладает свойствами: частное от деления V на $R^{\gamma+\frac{1}{2}}$ голоморфно при $R = 0$ и справедливы неравенства

$$\int_1^\infty V^2 dR < \infty, \quad \int_1^\infty \left(\frac{dV}{dR} \right)^2 dR < \infty. \quad (1.7)$$

2. Случай Шредингера—Клейна—Гордона

В этом случае, т. е. при условии (0.4), предыдущую теорему можно уточнить. Обозначим

$$M_0 = \hbar m, \quad A_0 = A(M_0), \quad B_0 = B(M_0), \quad C_0 = C(M_0), \\ \alpha = \sqrt{A_0} \hbar^{-1}, \quad \beta = B_0 \hbar^{-2}. \quad (2.1)$$

Уравнение (1.3) превращается в вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$\frac{d^2 v}{dR^2} + \left[-\alpha^2 + \frac{2\beta}{R} - \frac{\gamma^2 - \frac{1}{4}}{R^2} \right] v = 0, \quad (2.2)$$

где $\alpha^2, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$, если $\alpha^2 > 0$, мы выберем $\alpha > 0$.

Обозначим через v ненулевое решение уравнения (2.2), такое, что $vR^{-\gamma-\frac{1}{2}}$ есть целая функция от R ; оно определено с точностью до мультипликативной постоянной (Фукс).

Лемма 2. Сходимость интегралов (1.7) эквивалентна условию

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2} - \gamma \text{ целое число } > 0. \quad (2.3)$$

Доказательство. Запишем v в виде

$$v(R) = R^{\gamma+\frac{1}{2}} e^{-\alpha R} \sum_{s \in \mathbf{N}} c_s R^s \quad (c_s \in \mathbf{C}). \quad (2.4)$$

Подставляя это выражение в (2.2), мы получаем (Фукс) рекуррентную формулу, выражающую коэффициенты c_s через c_0 :

$$s(s+2\gamma)c_s = 2 \left[\alpha \left(s + \gamma - \frac{1}{2} \right) - \beta \right] c_{s-1}. \quad (2.5)$$

Условие (2.3) эквивалентно, таким образом, следующему:

$$\sum_{s \in \mathbf{N}} c_s R^s \text{ — многочлен.}$$

Из него следует $\alpha^2 > 0$, т. е. $\alpha > 0$, откуда сходимость интегралов (1.7).

Покажем, что условие (1.7) не может выполняться, если не выполнено (2.3).

Случай $\alpha > 0$. Если $\sum_s c_s R^s$ не многочлен, то при надлежащем выборе знака c_0 $c_s > 0$ при достаточно больших s . Пусть $\varepsilon \in]0, \alpha[$. Из (2.5) следует

$$s c_s > 2\varepsilon c_{s-1} \text{ для } s \gg 0.$$

Откуда

$$\sum_s c_s R^{\frac{1}{2}} > c' e^{2\beta R} \text{ для } R \gg 0,$$

где $c' = \text{const} > 0$. Поэтому интеграл (1.7)₁ расходится.

Случай $\alpha^2 < 0$. Классическое выражение v с помощью интеграла дает классическое асимптотическое выражение для v для больших R :

$$v(R) = ce^{\alpha R} R^{-\beta/\alpha} + \bar{c}e^{-\alpha R} R^{\beta/\alpha} + \dots,$$

где c и $\bar{c}$ постоянные, α чисто мнимо.

Интеграл (1.7), следовательно, расходится (ср. Уиттекер и Ватсон, Современный анализ, [18] гл. XVI: Вырожденная гипергеометрическая функция, асимптотическое разложение).

Случай $\alpha = 0$, $\beta < 0$. В силу (2.5)

$$v(R) = R^{\gamma + \frac{1}{2}} \sum_{s \in N}^{\sigma} c_s R^s, \text{ где } \forall s \ c_s > 0.$$

Следовательно, интеграл (1.7)₁ расходится.

Случай $\alpha = 0$, $\beta > 0$. Функция $R^{-\gamma - \frac{1}{2}} v$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с линейными коэффициентами. Отсюда по методу Лапласа

$$v(R) = \sqrt{R} \int_T t^{-2\gamma-1} e^{\sqrt{2\beta R}} (t - t^{-1}) dt,$$

где T граница полуполосы в $\mathbb{C}$, содержащей разрез $]-\infty, 0[$. Методом перевала получаем отсюда асимптотическое значение v для больших R

$$v(R) = R^{1/4} [ce^{2i\sqrt{2\beta R}} + \bar{c}e^{-2i\sqrt{2\beta R}}] + \dots;$$

т. е. снова расходимость интеграла (1.7)₁.

Теорема 1.2 и лемма 2, в которой α и β определены формулой (2.1), а γ — формулой (1.6), показывают, таким образом, что верна

Теорема 2. Если a есть оператор Шредингера — Клейна — Гордона, то три задачи

1) классическая задача (0.1), решение которой мы только что напомнили

2) лагранжева задача (2.1) § 3

$$aU = (a_{L^2} - c_L)U = (a_M - c_M)U = 0$$

на компактном многообразии V

3) та же задача mod $\frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. задача (3.1) § 1, имеет одни и те же условия разрешимости: существование тройки целых

чисел (l, m, n) , удовлетворяющих условиям (4.11) теоремы 4.1 § 1.

Замечание 2. Сравнение теоремы 1.2 и теоремы 3.1, 1) § 1 доказывает, что предыдущая теорема не применима к произвольному оператору a , ассоциированному с гамильтонианом H типа (0.2).

Заключение. Хотя классические граничные задачи и лагранжевы задачи абсолютно независимы, оказывается, что они определяют одни и те же уровни энергии для уравнений Шредингера и Клейна — Гордона.

Уровни энергии, необходимые в физике, возникают при решении уравнения Дирака, которое будет изучено в следующей главе.

Глава IV

УРАВНЕНИЕ ДИРАКА С ЭФФЕКТОМ ЗЕЕМАНА

Введение

В § 1 решается $\text{mod } \frac{1}{v^2}$ однородная лагранжева задача с несколькими неизвестными — одна из самых простых задач, к которым применима теорема 3 гл. II, § 4. При решении этой задачи возникает *четверка квантовых чисел*, которые появляются также при изучении уравнения Дирака.

В § 2 уравнение Дирака $\text{mod } \frac{1}{v^2}$ сводится в лагранжевом анализе к простейшей системе, решенной в § 1. Соответствующее сведение производится аналогично тому, как сделано в теореме 2.2 гл. II, § 4. В § 2 доказывается также, что *лагранжевы решения уравнения Дирака* (уравнения атома электрона в магнитном поле), *определенные mod $\frac{1}{v^2}$ на компактных многообразиях, существуют в точности для тех же уровней энергии, для которых существует классическое решение этого уравнения* (с учетом эффектов Зеемана и даже Пашена — Бека).

§ 1. ЛАГРАНЖЕВА ЗАДАЧА С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

В этом параграфе дается применение теоремы 3 из § 4, гл. II.

1. Выбор операторов, коммутирующих $\text{mod } \frac{1}{v^3}$

Аналогично гл. III, § 1, п. 1 обозначим

$$X = X^* = E^3; x, p \in E^3; R(x) = |x|, P(p) = |p|, Q(x, p) = \langle p, x \rangle, L(x, p) = |x \wedge p|, \quad (1.1)$$

так что

$$L^2 + Q^2 = P^2 R^2. \quad (1.2)$$

Обозначим, далее, $(M_1, M_2, M_3 = M)$ составляющие $x \wedge p$.

В силу гл. III, § 1, (1.3) функции, определенные следующими формулами:

$$H^{(1)}(x, p) = H[L(x, p), M(x, p), Q(x, p), R(x)], H^{(2)}(x, p) = L^2(x, p), H^{(3)}(x, p) = M(x, p), \quad (1.3)$$

находятся попарно в инволюции (см. гл. III, § 1, п. 2).

Применение теоремы 3 гл. II, § 4 требует задания трех $\mu \times \mu$ матриц $J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}$, зависящих от $(x, p) \in E^3 \oplus E^3$, таких, что матрицы лагранжевых операторов, ассоциированных с тремя матрицами

$$H^{(k)} E + \frac{1}{v} J^{(k)} \quad (E — \text{единичная } \mu \times \mu \text{ матрица}), \quad (1.4)$$

коммутируют $\text{mod } \frac{1}{v^3}$.

В силу замечания 3 гл. II, § 4, так как $H^{(k)}$ находятся попарно в инволюции, эта коммутативность эквивалентна условию

$$\forall i, k \quad (H^{(i)}, J^{(k)}) - (H^{(k)}, J^{(i)}) + J^{(i)} J^{(k)} - J^{(k)} J^{(i)} = 0, \quad (1.5)_{i, k}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скобка Пуассона.

Положим $\mu = 2$. Тогда $J^{(k)}$ — матрицы, действующие на векторы пространства $\mathbf{C}^2$, в которое мы введем эрмитову структуру. Выберем $J^{(k)}$ так, чтобы $iJ^{(k)}$ были самосопряженными матрицами (векторы из $\mathbf{C}^2$ называются *спинорами*).

Обозначения. Обозначим через $\sigma_0 = 1$ единичную 2×2 матрицу. Произвольная самосопряженная 2×2 матрица может быть представлена в виде $x_0 \sigma_0 + \sigma$, где x_0 — действительное число, а σ — самосопряженная матрица со следом, равным нулю;

$$\sigma = \sigma[x_1, x_2, x_3] = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3, \quad (1.6)$$

$$\text{где } (x_1, x_2, x_3) \in E^3, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — матрицы Паули, удовлетворяющие условиям

$$\sigma_k^2 = 1, \sigma_i \sigma_k = -\sigma_k \sigma_i, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i \quad (\text{единичная матрица обозначается } \sigma_0 \text{ или } 1). \quad (1.7)$$

Отсюда

$$\sigma^2[x] = |x|^2. \quad (1.8)$$

Замечание 1.1. Напомним следствия из (1.8): пусть u_2 есть автоморфизм E^3 , сохраняющий меру: $u_2 \in SU(2)$, $u_2 \sigma[x] u_2^{-1}$ есть самосопряженная матрица со следом нуль, т. е. имеет вид $\sigma(y)$, положим $y = ux$, т. е. $\sigma[ux] = u_2 \sigma[x] u_2^{-1}$. В силу (1.8) u сохраняет $|x|^2$, т. е. u есть вращение E^3 , $u \in SO(3)$. Отсюда морфизм

$$SU(2) \ni u_2 \mapsto u \in SO(3),$$

показывающий, что $SU(2)$ есть накрытие 2-го порядка группы $SO(3)$. Это — универсальное накрытие (см. Стинрод [17], стр. 115).

Лемма 1. Пусть задана матрица

$$J^{(1)} = if\sigma_3 + ig\sigma[x \wedge p], \quad (1.9)$$

где

$$f(x, p) = f[L(x, p), M(x, p), Q(x, p), R(x)], \quad g = g[L, M, Q, R].$$

Тогда условия (1.5) будут выполнены, если положить

$$J^{(2)} = 0, \quad J^{(3)} = \frac{i}{2} \sigma_3. \quad (1.10)$$

Замечание 1.2. Соотношения (1.5), очевидно, остаются верными, если к матрицам $H^{(i)}$ и $J^{(k)}$ добавить произвольные комплексные числа (т. е. числа, умноженные на единичную матрицу).

Доказательство (1.5)_{1,2}. $(H^{(2)}, J^{(1)}) = 0$ потому, что в силу гл. III, § 1, п. 1 L находится в инволюции с $Q, R, M = M_3$, а также с M_1 и M_2 .

Доказательство (1.5)_{1,3}. Так как M находится в инволюции с L, Q, R , то

$$(H^{(3)}, J^{(1)}) = ig(M, \sigma[x \wedge p]) = ig\sigma(-M_2, M_1, 0), \quad (1.11)$$

так как непосредственный (и классический) подсчет дает

$$(M, M_1) = -M_2, \quad (M, M_2) = M_1.$$

С другой стороны, из (1.7) следует

$$\sigma_3 \sigma[x \wedge p] - \sigma[x \wedge p] \sigma_3 = 2i\sigma[-M_2, M_1, 0],$$

откуда в силу определений (1.9) и (1.10) матриц $J^{(1)}$ и $J^{(3)}$ получаем

$$J^{(3)} J^{(1)} - J^{(1)} J^{(3)} = -ig\sigma[-M_2, M_1, 0]. \quad (1.12)$$

Из (1.11) и (1.12) следует (1.5)_{1,3}.

Доказательство (1.5)_{2,3} очевидно.

2. Решение лагранжевой задачи с двумя неизвестными

Обозначения. Пусть

$$a_{f,g}, a_{L^2}, a_M$$

— 2×2 матрицы лагранжевых операторов, ассоциированные с 2×2 матрицами:

$$H[L, M, Q, R] + \frac{i}{v} f[L, M, Q, R] \sigma_3 + \frac{i}{v} g[L, M, Q, R] \sigma[x \wedge p], \quad L^2, M. \quad (2.1)$$

Изучим решения $U = (U_1, U_2)$ системы

$$\begin{aligned} a_{f,g}U &= \left(a_L^2 - L_0^2 - \frac{2i}{v} L_0 l' \right) U = \\ &= \left(a_M - M_0 - \frac{i}{v} m' + \frac{i}{2v} \sigma_3 \right) U = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где U_1 и U_2 — лагранжевы функции, определенные на компактном лагранжевом многообразии V , l' и m' — действительные числа, близкие к нулю, квадратами которых можно пренебречь, L_0 и M_0 — действительные числа.

(Из леммы 1 и замечания 1.2 видно, в чем интерес этой системы.)

Обозначим, как в гл. III, § 1, $V[L_0, M_0]$ лагранжево многообразие в $E^3 \oplus E^3$ с уравнениями

$$\begin{aligned} V[L_0, M_0]: H[L_0, M_0, Q, R] = \\ L(x, p) - L_0 = M(x, p) - M_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Когда это многообразие компактно, оно представляет собой тор, точки которого задаются координатами

$$t \pmod{c[L_0, M_0]}, \quad \psi \pmod{2\pi}, \quad \varphi \pmod{2\pi}.$$

В гл. III, § 1 были определены $\Gamma[L_0, M_0]$, t и $c[L_0, M_0]$ (см. гл. III, § 1, формулы (2.5), (2.6), (2.7)). Мы предположим, что на $V[L_0, M_0]$ функции

$$\left(f - \frac{1}{2} H_M \right) c[L, M] \quad \text{и} \quad L g c[L, M]$$

близки к нулю, так что можно пренебречь их квадратами. Обозначим для компактного $V[L_0, M_0]$ и, следовательно, компактной $\Gamma[L_0, M_0]$

$$f_0 = \pi N_M[L_0, M_0] + \int_{\Gamma[L_0, M_0]} f[L_0, M_0, Q, R] dt, \quad (2.4)$$

$$g_0 = L_0 \int_{\Gamma[L_0, M_0]} g[L_0, M_0, Q, R] dt,$$

$$2\pi\varepsilon[L_0, M_0] = \sqrt{f_0^2 + 2 \frac{M_0}{L_0} f_0 g_0 + g_0^2} > 0, \quad \text{где } |M_0| < L_0.$$

Мы увидим, что можно пренебречь квадратами f_0 , g_0 и ε .

Теорема 2. Компактные многообразия $V \subset E^3 \oplus E^3$, на которых определены решения системы (2.2), это торы $V[L_0, M_0]$ такие, что

$$\begin{aligned} L_0 &= \hbar \left(l + \frac{1}{2} - l' \right), \quad M_0 = \hbar (m - m'), \\ \hbar \left(l + \frac{1}{2} \right) + N \left[\hbar \left(l + \frac{1}{2} \right), \hbar m \right] &= \hbar n \pm \hbar \varepsilon \left[\hbar \left(l + \frac{1}{2} \right), \hbar m \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $l, m - \frac{1}{2}$, n — три целых числа, удовлетворяющих неравенствам

$$|m| \leq l + \frac{1}{2}, \quad l < n, \quad (2.6)$$

l' и m' — числа близкие к нулю, произвольные, кроме случая $m = l + \frac{1}{2}$; в этом случае они должны быть выбраны так, чтобы

$$|M_0| < L_0. \quad (2.7)$$

Замечание 2.1. Решение U будет обозначаться U_+ или U_- в зависимости от того, какой знак выбран в формуле (2.5)₃; лагранжева амплитуда $\beta(\beta_1, \beta_2)$ будет соответственно обозначаться $\beta_{\pm}$; она удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \beta_{\pm}(t + c[L_0, M_0], \psi, \varphi) &= c_{\pm 1} \beta_{\pm}(t, \psi, \varphi), \\ \beta_{\pm}(t, \psi + 2\pi, \varphi) &= c_{\pm 2} \beta_{\pm}(t, \psi, \varphi), \\ \beta_{\pm}(t, \psi, \varphi + 2\pi) &= c_{\pm 3} \beta_{\pm}(t, \psi, \varphi); \end{aligned} \quad (2.8)$$

$c_{\pm k}$ — комплексные числа по модулю $= 1$, определенные формулами

$$\left. \begin{aligned} c_{\pm 1} &= e^{2\pi i(l' N_L[L_0, M_0] + m' N_M[L_0, M_0] \mp \varepsilon[L_0, M_0])}, \\ c_{\pm 2} &= e^{2\pi i l'}, \quad c_{\pm 3} = -e^{2\pi i m'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Доказательство. В силу леммы 1 и замечания 1.2 можно применить теорему 3 гл. II, § 4. Многообразия $\tilde{V}$, на которых определено решение системы (2.2), есть, следовательно, накрытия многообразий V с уравнениями (2.3). Те многообразия V , которые компактны, представляют собой торы $V[L_0, M_0]$.

Выясним, когда U определено на таком торе, т. е. когда

$$\left(\frac{\eta}{d^3 x}\right)^{1/2} e^{v_0 \Phi_{R_0}} \beta: V[L_0, M_0] \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad (2.10)$$

в координатах, заданных репером R_0 ,

$$\arg \eta = 0, \quad \arg d^3 x = m_{R_0},$$

m_{R_0} и φ_{R_0} — соответственно индекс Маслова и фаза многообразия $V[L_0, M_0]$ в репере R_0 .

В силу гл. III, § 1, формул (3.5) и (3.4)

$$\left. \begin{aligned} m_{R_0} &= \left[\frac{1}{\pi} \psi \right] - \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{H_Q}{H_R} \right], \\ \varphi_R &= \Omega + L_0 \psi + M_0 \varphi, \end{aligned} \right\} \text{ где } [\dots] \text{ — целая часть } \dots, \quad (2.11)$$

где Ω определено в гл. III, § 1 формулой (2.8). Закончим применение теоремы 3 гл. II, § 4. В силу замечаний 3.2 и 3.3 гл. III, § 1 характеристические векторы κ , κ_{L^2} , κ_M гамильтонианов H , L^2 , M таковы:

$$\begin{aligned}\kappa: dt &= 1, & d\psi &= H_L, & d\varphi &= H_M, \\ \kappa_{L^2}: dt &= 0, & d\psi &= 2L_0, & d\varphi &= 0, \\ \kappa_M: dt &= 0, & d\psi &= 0, & d\varphi &= 1.\end{aligned}$$

Система (2.2) эквивалентна, следовательно, в силу этой теоремы, условию

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_L \frac{\partial}{\partial \psi} + H_M \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \beta + if\sigma_3 \beta + ig\sigma[x \wedge p] \beta &= 0, \\ \frac{\partial \beta}{\partial \psi} - il' \beta &= 0, & \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} - im' \beta + \frac{i}{2} \sigma_3 \beta &= 0,\end{aligned}$$

т. е. системе Пфаффа, которая, согласно этой теореме, полностью интегрируема:

$$\begin{aligned}d\beta + i \left[f\sigma_3 dt + g\sigma[x \wedge p] dt - l' (d\psi - H_L dt) - \right. \\ \left. - \left(m' - \frac{1}{2} \sigma_3 \right) (d\varphi - H_M dt) \right] \beta = 0.\end{aligned}\quad (2.12)$$

В силу гл. III, § 1, (1.5)

$$x \wedge p = L_0 J_3.$$

Следовательно, согласно гл. III, § 1, (1.12)₃ и (1.11),

$$\sigma[x \wedge p] = L_0 [\sigma_1 \cos \varphi \sin \vartheta + \sigma_2 \sin \varphi \sin \vartheta + \sigma_3 \cos \vartheta],$$

где

$$\cos \vartheta = \frac{M_0}{L_0}.\quad (2.13)$$

Согласно (1.7), можно, поэтому, записать $\sigma[x \wedge p]$ таким образом:

$$\begin{aligned}\sigma[x \wedge p] &= L_0 \sigma_1 (\cos \varphi + i\sigma_3 \sin \varphi) \sin \vartheta + L_0 \sigma_3 \cos \vartheta = \\ &= L_0 \sigma_1 e^{i\varphi \sigma_3} \sin \vartheta + L_0 \sigma_3 \cos \vartheta = \\ &= L_0 e^{-\frac{i\varphi}{2} \sigma_3} (\sigma_1 \sin \vartheta + \sigma_3 \cos \vartheta) e^{\frac{i\varphi}{2} \sigma_3}.\end{aligned}$$

С другой стороны, функции λ и μ от $[L, M, t]$, определенные в гл. III, § 1 формулой (2.10), согласно гл. III, § 2, (2.3), удовлетворяют условиям

$$\lambda_t = -H_L, \quad \mu_t = -H_M.\quad (2.14)$$

Положим

$$\beta = e^{-\frac{i}{2}\sigma_3\varphi + il'(\psi+\lambda) + im'(\varphi+\mu)} \gamma, \quad (2.15)$$

Система (2.12) переписется тогда так:

$$d\gamma + i \left[\left(f - \frac{1}{2} H_M \right) \sigma_3 + L_0 g (\sigma_1 \sin \vartheta + \sigma_3 \cos \vartheta) \right] \gamma dt = 0. \quad (2.16)$$

Отсюда очевидно, что эта система полностью интегрируема; γ не зависит от φ и ψ и является функцией только от t .

Условие (2.10), что U определено на $V[L_0, M_0]$, можно теперь сформулировать так:

$$\left(\frac{\eta}{d^3 x} \right)^{\frac{1}{2}} e^{v_0 \Omega + v_0 L_0 \psi + v_0 M_0 \varphi - \frac{i}{2} \sigma_3 \varphi + il'(\psi+\lambda) + im'(\varphi+\mu)} \gamma: V \rightarrow \mathbb{C}^2.$$

Но Ω , λ , μ зависят только от t и в силу гл. III, § 2, формул (1.4) и (1.5) увеличиваются на величины

$$\Delta_t \Omega = 2\pi N [L_0, M_0], \quad \Delta_t \lambda = 2\pi N_L [L_0, M_0], \quad \Delta_t \mu = 2\pi N_M [L_0, M_0], \quad (2.17)$$

когда к t добавляется $c [L_0, M_0]$; N определено в гл. III, § 1 формулой (2.9).

Если мы обозначим $v_0 = \frac{i}{\hbar}$ ($\hbar > 0$), то условие (2.10) «лагранжевости» функции U на V сформулируется, следовательно, в силу (2.11) и того, что $e^{-\pi i \sigma_3} = -1$, так: существует $\varepsilon \in \mathbb{R}$, такое, что

$$\gamma(t + c [L_0, M_0]) = e^{2\pi i \varepsilon} \gamma(t), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} N [L_0, M_0] + l' N_L + m' N_M + \frac{1}{2} + \varepsilon &= \frac{1}{\hbar} L_0 + l' - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{\hbar} M_0 + m' - \frac{\hbar_1}{2} = 0 \pmod{1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Отыскание решений γ уравнений (2.16), удовлетворяющих (2.18), является классическим: матрица

$$\left(f - \frac{1}{2} H_M \right) \sigma_3 + L_0 g (\sigma_1 \sin \vartheta + \sigma_3 \cos \vartheta)$$

самосопряжена, имеет след, равный нулю, и периодически зависит от t ; ее период равен $c [L_0, M_0]$. 2×2 -матрица $u(t)$, определенная из уравнения

$$\begin{aligned} du + i \left[\left(f - \frac{1}{2} H_M \right) \sigma_3 + L_0 g [\sigma_1 \sin \vartheta + \sigma_3 \cos \vartheta] \right] u dt &= 0; \\ u(0) &= 1, \end{aligned} \quad (2.20)$$

есть, следовательно, унитарная матрица с определителем 1: $u \in SU(2)$. Она удовлетворяет условию

$$u(t + c[L_0, M_0]) = u(t) u(c[L_0, M_0]).$$

Общее решение уравнения (2.16) имеет вид

$$\gamma(t) = u(t) \delta, \text{ где } \delta \in \mathbb{C}^2.$$

Чтобы γ удовлетворяла условию (2.18), необходимо и достаточно выбрать в качестве δ один из собственных векторов матрицы $u(c[L_0, M_0]) \in SU(2)$. Обозначим

$$e^{\pm 2\pi i \varepsilon [L_0, M_0]} \quad \left(0 \leq \varepsilon [L_0, M_0] \leq \frac{1}{2} \right) \quad (2.21)$$

собственные значения $u(c[L_0, M_0])$.

В формуле (2.18) $\varepsilon = \mp \varepsilon [L_0, M_0]$.

Таким образом, условие существования лагранжева решения U системы (2.2), определенного на торе $V[L_0, M_0]$, состоит в том, чтобы существовали три целых числа $l, m - \frac{1}{2}, n$, такие, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} L_0 + l' + \frac{1}{\hbar} N[L_0, M_0] + l' N_L + m' N_M &= n \pm \varepsilon [L_0, M_0], \\ \frac{1}{\hbar} L_0 + l' - \frac{1}{2} &= l, \quad \frac{1}{\hbar} M_0 + m' = m, \text{ где } |M_0| < L_0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Это условие не предполагает, что на $V[L_0, M_0]$ можно пренебрегать квадратами $l', m', \left(f - \frac{1}{2} H_M\right) c[L, M], L_g c[L, M]$. U и β будут в дальнейшем обозначаться $U_{\pm}$ и $\beta_{\pm}$ в зависимости от того, какой знак стоит в формуле (2.22) перед $\varepsilon [L_0, M_0]$; в силу (2.15), (2.17), (2.18), где $\varepsilon = \mp \varepsilon [L_0, M_0]$, $\beta_{\pm}$ удовлетворяют условиям (2.8), где $c_{\pm k}$ имеют значения (2.9).

Предположим, что можно пренебречь квадратами l', m' и квадратами производных от $\hbar \varepsilon$. Формулы (2.22) тогда сведутся к (2.5); целые числа $l, m - \frac{1}{2}, n$ должны удовлетворять условию (2.5)₃, которое не зависит от l' и m' . Так как l и n — целые числа, ε мало и $N > 0$, из (2.5)₃ следует $l < n$; из того, что l' и m' малы, и из формул (2.5)₁ и (2.5)₂ получаем, что $|m| \leq l + \frac{1}{2}$, что завершает доказательство (2.6).

Остается доказать, что $\varepsilon [L_0, M_0]$ приближенно выражается формулой (2.4). Так как на $V[L_0, M_0]$ мы предполагаем, что

$$\left(f - \frac{1}{2} H_M\right) c[L, M] \quad \text{и} \quad L_g c[L, M]$$

малы и их квадратами можно пренебречь, то по модулю этих квадратов решение (2.20) имеет вид (с учетом 2.14)₂)

$$u = 1 - i \left[\left(\frac{1}{2} \mu + \int_0^t f dt \right) \sigma_3 + L_0 \int_0^t g dt (\sigma_1 \sin \vartheta + \sigma_3 \cos \vartheta) \right],$$

т. е., так как должно выполняться условие $u \in SU(2)$,

$$u = e - i \left[\left(\frac{1}{2} \mu + \int_0^t f dt \right) \sigma_3 + L_0 \int_0^t g dt (\sigma_1 \sin \vartheta + \sigma_3 \cos \vartheta) \right].$$

Следовательно, в силу (2.17), определения (2.21), функции $\varepsilon[L_0, M_0]$ и определения (2.4) f_0 и g_0 числа $\pm 2\pi\varepsilon[L_0, M_0]$ приближенно равны собственным значениям матрицы со следом нуль:

$$f_0 \sigma_3 + g_0 (\sigma_1 \sin \vartheta + \sigma_3 \cos \vartheta).$$

Но в силу (1.7) и (2.13) квадрат этой матрицы равен

$$(f_0 + g_0 \cos \vartheta)^2 + g_0^2 \sin^2 \vartheta = f_0^2 + 2 \frac{M_0}{L_0} f_0 g_0 + g_0^2,$$

откуда получаем приближенное выражение (2.4)₂ для $\varepsilon[L_0, M_0]$.

Замечание 2.2. Квантовые числа

$$l, m, n, \pm 1$$

те же самые, которые возникают при классическом решении уравнения Дирака при условии более сильном, чем (2.6),

менее сильном, чем то, которое на них в силу (2.7) накладывает выбор $l' = m' = 0$, а именно:

$$|m| \leq l - \frac{1}{2}, \quad l < n. \quad (2.6)^{\text{bis}}$$

Вот это условие.

Определение 2. В гл. III, § 1 решена система с одной неизвестной функцией, аналогичная системе (2.2), в которой положено $l' = m' = 0$. При этом лагранжева амплитуда неизвестной должна быть постоянна; это согласуется с физическим характером амплитуды α и фазы $v_0 \varphi_R$: α должна меняться медленнее, чем $e^{v_0 \varphi_R}$.

Чтобы приблизиться к этой ситуации, зададим четверку чисел

$$l, m, n, \pm 1,$$

удовлетворяющих условию (2.5)₃ существования для всех l', m' лагранжева решения уравнений (2.2) на $V[L_0, M_0]$. Потребуем, чтобы (l', m') давало функции

$$(l', m') \mapsto |C_{\pm 1} - 1|^2 + |C_{\pm 2} - 1|^2 + |C_{\pm 3} - 1|^2 \in \mathbb{R}$$

значения близкие к ее минимуму, т. е. в силу (2.9), так как значениями l'^2 и m'^2 можно пренебречь по сравнению с l' и m' , эти числа должны давать значения, близкие к минимуму функции

$$(l', m') \mapsto l'^2 + m'^2 + [l'N_L + m'N_M \mp \varepsilon]^2 \in \mathbb{R}.$$

Если этот выбор, т. е. значения

$$(l', m'), \text{ близкие к } \pm \frac{\varepsilon}{1 + N_L^2 + N_M^2} (N_L, N_M),$$

удовлетворяет необходимому условию (2.7), то в этом и только этом случае мы будем называть *четверку* $(l, m, n, \pm 1)$ *допустимой*. В § 2 (уравнение Дирака) будет рассмотрен следующий случай:

Пример 2. (N_L, N_M) близко к $(-1, 0)$. Следовательно, (l', m') близко к $(\mp \frac{\varepsilon}{2}, 0)$. В силу (2.7) четверки $(l, m, n, \pm 1)$ допустимы, если они удовлетворяют условию (2.5)₃ и (с соответствующим знаком) условию

$$0 \leq l < n, \quad |m| \leq l \pm \frac{1}{2}. \quad (2.23)$$

В квантовой механике принято обозначение

$$j = l \pm \frac{1}{2}$$

и рассматриваются *четверки квантовых чисел*

$$(l, m, n, j = l \pm \frac{1}{2}).$$

Они являются *допустимыми*, если удовлетворяется условие (2.5)₃ и если

$$0 \leq l < n \quad |m| \leq j. \quad (2.24)$$

Для каждого допустимого выбора (l', m') такой четверке соответствует решение U системы (2.2), определенное с точностью до постоянного комплексного множителя.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

0. Резюме

Уравнение Дирака — это система с 4 неизвестными функциями; к этой системе неприменимы теоремы 2.1 и 2.2 гл. II, § 4, так как $\det a_0^0$ имеет двойные корни.

В теореме 1, формулировка которой напоминает формулировку теоремы 2.2, гл. II, § 4, эта система с четырьмя неизвестными сводится $\text{mod } \frac{1}{v^2}$ к самосопряженной системе с двумя неизвестными.

В п. 2 эта система сводится к «приведенному уравнению Дирака», которое уже принадлежит к типу, рассмотренному в § 1. Это сведение достигается отбрасыванием членов, которыми можно пренебречь в силу порядка величины магнитного поля.

В п. 3 показано, что уровни энергии, определенные этим приведенным уравнением Дирака, в лагранжевом анализе совпадают с теми уровнями, которые определяет классическое решение уравнения Дирака даже в случае, когда интенсивность магнитного поля достаточна для того, чтобы имел место эффект Пашена — Бека.

Однако в п. 4 получена вероятность присутствия электрона, которая отличается от соответствующей вероятности в волновой механике и принадлежит первой квантовой теории.

1. Редукция уравнения Дирака
в лагранжевом анализе

Зададим два бесконечно дифференцируемых отображения и константу

$$A: E^3 \setminus \{0\} \rightarrow R_+; \quad B: E^3 \rightarrow E^3; \quad c \in R_+.$$

Пусть a' и a'' — две 2×2 -матрицы лагранжевых операторов, выражение которых в $Z(3) = E^3 \oplus E^3$ имеет вид

$$a' = A(x) + \sigma \left[\frac{1}{v} \frac{d}{dx} + B(x) \right], \quad a'' = A(x) - \sigma \left[\frac{1}{v} \frac{d}{dx} + B(x) \right],$$

где σ — 2×2 -матрица, определенная в § 1 формулой (1.6), a' и a'' — самосопряженные операторы; они ассоциированы с самосопряженными матрицами

$$A(x) + \sigma[p + B(x)], \quad A(x) - \sigma[p + B(x)].$$

Уравнение Дирака представляет собой систему

$$a'U' = CU'', \quad a''U'' = CU', \tag{1.1}$$

неизвестные которой U' и U'' — векторные функции. Потребуем, чтобы две компоненты каждого из этих векторов были лагранжевыми функциями, определенными на одном и том же компактном лагранжевом многообразии $V \subset Z(3) = E^3 \oplus E^3$. Уравнение Дирака (1.1), очевидно, эквивалентно

i) системе с неизвестной U'

$$[C^2 - a'' \circ a'] U' = 0; \quad (1.2)$$

ii) системе с неизвестной U''

$$[C^2 - a' \circ a''] U'' = 0. \quad (1.3)$$

Вычисление $C^2 - a'' \circ a'$ и $C^2 - a' \circ a''$ просто и является классическим. Чтобы записать его результат, обозначим

$$\begin{aligned} H(x, p) &= \frac{1}{2} |p + B(x)|^2 + \frac{C^2}{2} - \frac{1}{2} A^2(x), \\ J'(x, p) &= \frac{i}{2} \sigma \left[\frac{d}{dx} \wedge B(x) \right] + \frac{1}{2} \sigma[A_x]; \\ J''(x, p) &= \frac{1}{2} \sigma \left[\frac{d}{dx} \wedge B(x) \right] - \frac{1}{2} \sigma[A_x], \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\frac{d}{dx} \wedge B = \text{rot } B$. В этих обозначениях имеем:

$\frac{1}{2} [C^2 - a'' \circ a']$ — матрица, ассоциированная
с 2×2 -матрицей $H + \frac{1}{v} J'$;

$\frac{1}{2} [C^2 - a' \circ a'']$ — матрица, ассоциированная
с 2×2 -матрицей $H + \frac{1}{v} J''$.

Замечание 1.1. Эти матрицы не самосопряжены, но сопряжены друг с другом.

Обозначения. Пусть W — гиперповерхность в $E^3 + E^3$ с уравнением

$$W: H(x, p) = 0; \quad (1.5)$$

пусть, далее, β' и β'' — лагранжевы амплитуды U' и U'' :

$$\beta': V \rightarrow \mathbf{C}^2; \quad \beta'': V \rightarrow \mathbf{C}^2.$$

В силу теоремы 4 гл. II, § 3 уравнение (1.2) эквивалентно $\text{mod } \frac{1}{v^2}$ условиям

$$\begin{aligned} V &\subset W, \\ \frac{d\beta'}{dt} + J'\beta' &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\frac{d}{dt}$ есть производная Ли $\mathcal{L}_\kappa$ вдоль характеристического вектора κ многообразия V .

Точно так же (1.3), эквивалентно $\bmod \frac{1}{v^2}$ условиям

$$V \subset W, \quad \frac{d\beta''}{dt} + J''\beta'' = 0. \quad (1.7)$$

В силу (1.1) β' и β'' удовлетворяют на V двум эквивалентным уравнениям:

$$\{A(x) + \sigma[p + B(x)]\}\beta' = C\beta''; \quad \{A(x) - \sigma[p + B(x)]\}\beta'' = C\beta' \quad (1.8)$$

Из эквивалентности (1.2) и (1.3) следует эквивалентность (1.6) и (1.7). Соотношения (1.8) преобразуют, очевидно, решения одного из этих уравнений в решения другого.

Из определения (1.5) поверхности W следует существование функции

$$\rho: W \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

такой, что

$$A = C \operatorname{ch} 2\rho, \quad |p + B| = C \operatorname{sh} 2\rho. \quad (1.9)$$

Обозначим

$$\tau = \frac{1}{C \operatorname{sh} 2\rho} \sigma[p + B] \quad (1.10)$$

в силу § 1, формулы (1.8), $\tau^2 = 1$. Отсюда

$$Cl^{\pm 2\rho\tau} = A \pm \sigma[p + B].$$

Соотношение (1.8), связывающее β' и β'' , может, следовательно, быть записано в виде

$$\beta'' = e^{2\rho\tau}\beta'.$$

Из него следует существование функции β , такой, что $\beta: V \rightarrow \mathbb{C}^2$,

$$\beta' = e^{-\rho\tau}\beta, \quad \beta'' = e^{\rho\tau}\beta.$$

Эквивалентные соотношения (1.6) и (1.7) можно через эту функцию записать так:

$$\frac{d\beta}{dt} + J\beta = 0, \quad (1.11)$$

где 2×2 -матрица J имеет вид

$$J = e^{\rho\tau} \frac{d}{dt} (e^{-\rho\tau}) + e^{\rho\tau} J' e^{-\rho\tau} = e^{-\rho\tau} \frac{d}{dt} (e^{\rho\tau}) + e^{-\rho\tau} J'' e^{\rho\tau}. \quad (1.12)$$

Мы покажем, что это определение J эквивалентно формуле (1.14), откуда следует

Теорема 1. Решение на $V \bmod \frac{1}{v^2}$ систем (1.2) и (1.3), т. е. уравнения Дирака (1.1), эквивалентно решению системы с двумя неизвестными функциями

$$aU = 0 \bmod \frac{1}{v^2}, \quad (1.13)$$

где a есть матрица лагранжевых операторов, ассоциированная с 2×2 -матрицей

$$H + \frac{1}{v} J;$$

здесь H определено формулой (1.4)₁, а

$$J = J(x, p) = \frac{i}{2} \sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} \wedge B \right] + \frac{i}{2} \frac{1}{A+C} \sigma \left[(p+b) \wedge A_x \right]. \quad (1.14)$$

Замечание 1.2. $\frac{1}{v} J$ и, следовательно, оператор a самосопряжены. В этом в силу замечания 1.1 интерес замены системы (1.2) — (1.3) на (1.13).

Доказательство (1.14). В силу определений (1.4) и (1.12) матриц J' , J'' и J достаточно доказать следующие формулы, в которых $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, а $\frac{\partial}{\partial x} \wedge \cdot = \text{rot}$.

$$\begin{aligned} \frac{C}{2} \left\{ e^{\rho\tau} \frac{d}{dt} (e^{-\rho\tau}) + e^{-\rho\tau} \frac{d}{dt} (e^{\rho\tau}) \right\} = \\ = -\frac{i}{2} (A-C) \sigma [\text{rot } B] - \frac{A}{A+C} \sigma \left[(p+B) \wedge A_x \right] + \\ + \frac{i}{2} \langle p+B, \text{rot } B \rangle \tau \text{th } \rho; \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{iC}{4} \{ e^{\rho\tau} \sigma [\text{rot } B] e^{-\rho\tau} + e^{-\rho\tau} \sigma [\text{rot } B] e^{\rho\tau} \} = \frac{i}{2} A \sigma [\text{rot } B] - \\ - \frac{i}{2} \langle p+B, \text{rot } B \rangle \tau \text{th } \rho; \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\frac{C}{4} \{ e^{\rho\tau} \sigma [A_x] e^{-\rho\tau} - e^{-\rho\tau} \sigma [A_x] e^{\rho\tau} \} = \frac{i}{2} \sigma \left[(p+B) \wedge A_x \right]. \quad (1.17)$$

Замечание 1.3. Соотношения Паули § 1, (1.7) могут быть записаны в виде

$$\forall x, y \in E^3 \quad \sigma[x] \sigma[y] = \langle x, y \rangle + i \sigma[x \wedge y], \quad (1.18)$$

откуда, в частности,

$$\sigma[x] \sigma[y] + \sigma[y] \sigma[x] = 2 \langle x, y \rangle, \quad (1.19)$$

$$\sigma[x] \sigma[y] - \sigma[y] \sigma[x] = 2i \sigma[x \wedge y]. \quad (1.20)$$

Доказательство (1.15). Так как $\tau^2 = 1$ и ρ действительно, то

$$e^{\pm \rho \tau} = \operatorname{ch} \rho \pm \tau \operatorname{sh} \rho,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} e^{\mp \rho \tau} \frac{d}{dt} (e^{\pm \rho \tau}) &= e^{\mp \rho \tau} \left[\frac{d\rho}{dt} \operatorname{sh} \rho \pm \tau \frac{d\rho}{dt} \operatorname{ch} \rho \pm \frac{d\tau}{dt} \operatorname{sh} \rho \right] = \\ &= \pm \tau \frac{d\rho}{dt} \pm e^{\mp \rho \tau} \frac{d\tau}{dt} \operatorname{sh} \rho, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{1}{2} \left[e^{\rho \tau} \frac{d}{dt} (e^{-\rho \tau}) + e^{-\rho \tau} \frac{d}{dt} (e^{\rho \tau}) \right] = -\tau \frac{d\tau}{dt} \operatorname{sh}^2 \rho. \quad (1.21)$$

Чтобы вычислить $\tau \frac{d\tau}{dt}$, продифференцируем определение τ — формулу (1.10). Мы получим

$$C \frac{d\tau}{dt} \operatorname{sh} 2\rho + 2C\tau \frac{d\rho}{dt} \operatorname{ch} 2\rho = \sigma \left[\frac{d}{dt} (p + B) \right].$$

откуда в силу (1.9) и (1.10)

$$C^2 \tau \frac{d\tau}{dt} \operatorname{sh}^2 2\rho = -\frac{1}{2} \frac{dA^2}{dt} + \sigma[p + B] \sigma \left[\frac{d}{dt} (p + B) \right].$$

Поэтому в силу (1.18) и так как $A^2 = C^2 + (p + B)^2$ на W мы получаем

$$C^2 \tau \frac{d\tau}{dt} \operatorname{sh}^2 2\rho = i\sigma \left[(p + B) \wedge \frac{d}{dt} (p + B) \right]. \quad (1.22)$$

По определению $\frac{d}{dt}$ (гл. II, § 3, формула (3.10))

$$\frac{dx}{dt} = H_p(x, p), \quad \frac{dp}{dt} = -H_x(x, p),$$

откуда с помощью простых вычислений

$$\frac{d}{dt} (p + B) = -(p + B) \wedge \operatorname{rot} B + A A_x,$$

$$(p + B) \wedge \frac{d}{dt} (p + B) =$$

$$= |p + B|^2 \operatorname{rot} B - \langle p + B, \operatorname{rot} B \rangle (p + B) + A(p + B) \wedge A_x.$$

Так как

$$2C \operatorname{ch}^2 \rho = C [\operatorname{ch} 2\rho + 1] = A + C, \quad |p + B|^2 = A^2 - C^2,$$

то в силу (1.10) формулу (1.22) можно записать так:

$$2C\tau \frac{d\tau}{dt} \operatorname{sh}^2 \rho =$$

$$\begin{aligned} &= i(A - C) \sigma [\operatorname{rot} B] - i \langle p + B, \operatorname{rot} B \rangle \tau \operatorname{ch} \rho + \\ &\quad + i \frac{A}{A + C} \sigma [(p + B) \wedge A_x], \end{aligned}$$

откуда в силу (1.21) получаем (1.15).

Доказательство (1.16) и (1.17). Пусть $y \in E^3$

$$\begin{aligned} e^{\pm \rho \tau} \sigma[y] e^{\mp \rho \tau} &= \\ &= \sigma(y) \operatorname{ch}^2 \rho \pm \frac{1}{2} \{ \tau \sigma[y] - \sigma(y) \tau \} \operatorname{sh} 2\rho - \tau \sigma[y] \tau \operatorname{sh}^2 \rho. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Но, согласно определению τ (1.10) и формулам коммутации (1.20),

$$\frac{C}{2} \{ \tau \sigma[y] - \sigma[y] \tau \} \operatorname{sh} 2\rho = i \sigma[(p + B) \wedge y]. \quad (1.24)$$

Согласно (1.10) и (1.19),

$$\tau \sigma[y] = \frac{2}{C \operatorname{sh} 2\rho} \langle p + B, y \rangle - \sigma[y] \tau.$$

Следовательно,

$$\tau \sigma[y] \tau = \frac{2}{C \operatorname{sh} 2\rho} \langle p + B, y \rangle \tau - \sigma[y]. \quad (1.25)$$

В силу (1.24) и (1.25) формула (1.23) может быть записана в виде

$$C e^{\pm \rho \tau} \tau[y] e^{\mp \rho \tau} = A \sigma[y] - \langle p + B, y \rangle \tau \operatorname{th} \rho \pm i \sigma[(p + B) \wedge y].$$

Отсюда получаются два соотношения:

$$\frac{C}{2} \{ e^{\rho \tau} \sigma[y] e^{-\rho \tau} + e^{-\rho \tau} \sigma[y] e^{\rho \tau} \} = A \sigma[y] - \langle p + B, y \rangle \tau \operatorname{th} \rho,$$

$$\frac{C}{2} \{ e^{\rho \tau} \sigma[y] e^{-\rho \tau} - e^{-\rho \tau} \sigma[y] e^{\rho \tau} \} = i \sigma[(p + B) \wedge y],$$

которые доказывают, соответственно (1.16) и (1.17).

2. Приведенное уравнение Дирака для атома электрона в постоянном магнитном поле

Выберем функции A , B и C так, чтобы функция H , определенная формулой (1.4)₁, была гамильтонианом релятивистского электрона, помещенного в постоянное магнитное поле: H должна быть, с точностью до множителя μ функцией, определенной формулами (4.15) и (4.18) гл. III, § 1. Это значит: A — функция R ; отображение $R \mapsto RA(R)$ аффинное;

$$B = \frac{1}{2} (-bx_2, bx_1, 0), \quad \text{где } b \in \mathbf{R}.$$

В выражении (1.4)₁ для H пренебрежем B^2 , как это было сделано в формуле (4.20) гл. III, § 1; в выражении (1.14) для J пренебрежем членом $\frac{i}{2} \frac{1}{A+C} \sigma[B \wedge A_x]$ по сравнению с

$\frac{i}{2} \sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} \wedge B \right]$, потому что на $V \frac{x A_x}{A+C}$ мало по сравнению с 1. Выражения (1.14) и (1.4) для H и J сводятся, следовательно, к таким:

$$H(x, p) = \frac{1}{2} [P^2 + bM + C^2 - A^2(R)], \quad (2.1)$$

где b и $C \in \mathbb{R}$; $R \mapsto RA(R)$ аффинное;

$$J(x, p) = \frac{i}{2} b \sigma_3 - \frac{i}{2} \frac{A_R}{R(A+C)} \sigma[x \wedge p]. \quad (2.2)$$

Если H и J выбраны таким образом, матрицу лагранжева оператора, ассоциированного с функцией

$$H + \frac{1}{v} J,$$

мы будем обозначать a_r и называть «приведенным оператором Дирака».

Замечание 2. H , определенное формулой (2.1), совпадает, следовательно, с точностью до постоянного множителя μ с функцией, определенной формулой (4.20) гл. III, § 1. Отсюда мы имеем

$$A = \frac{1}{c} \left(E + \frac{\varepsilon^2 Z}{R} \right), \quad b = \frac{\varepsilon \mathcal{H}}{c}, \quad C = \mu c,$$

где c — скорость света,

μ и ε — масса и заряд электрона,

Z — атомное число ядра,

E — уровень энергии атома; он близок к μc^2 ,

$\mathcal{H}$ — интенсивность магнитного поля.

Мы заменим изучение уравнения Дирака изучением системы

$$a_r U = \left(a_{L^2} - L_0^2 - \frac{2i}{v} L_0 l' \right) U = \left(a_M - M_0 - \frac{i}{v} m' + \frac{i}{2v} \sigma_3 \right) U = 0, \quad (2.3)$$

где две составляющие вектора U являются лагранжевыми функциями, определенными на компактном лагранжевом многообразии $V \subset \mathbb{E}^3 \oplus \mathbb{E}^3$, и где l' и m' — действительные числа, квадратами которых можно пренебречь.

Теорема 2 § 1 может быть применена к системе (2.3) с помощью двух следующих лемм:

Лемма 2.1. Приближенное значение функции ε , определенной в § 1 формулой (2.4)₃, таково:

$$\varepsilon[L_0, M_0] = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + N_L)^2 + 2 \frac{M_0}{L_0} (1 + N_L) N_M + N_M^2}, \quad (2.4)$$

где $N_L = N_L[L_0, M_0]$, $N_M = N_M[L_0, M_0]$.

Доказательство. Вычислим значения f_0 и g_0 , определенные в § 1 формулами (2.4)₁ и (2.4)₂. В силу (2.1) имеем

$$H[L, M, Q, R] = \frac{L^2 + Q^2}{2R^2} + \frac{b}{2} M + \frac{1}{2} C^2 - \frac{1}{2} A^2(R). \quad (2.5)$$

Следовательно,

$$H_L = \frac{L}{R^2}; \quad H_M = \frac{b}{2}.$$

Но в силу гл. III, § 2 (2.3)

$$\lambda_t = -H_L, \quad \mu_t = -H_M;$$

далее, согласно гл. III, § 2 (1.5), мы имеем (обозначая $\Gamma[L_0, M_0]$ просто Γ):

$$\int_{\Gamma} \lambda_t dt = \Delta_t \lambda = 2\pi N_L, \quad \int_{\Gamma} \mu_t dt = \Delta_t \mu = 2\pi N_M.$$

Отсюда

$$\int_{\Gamma} \frac{L_0}{R^2} dt = -2\pi N_L, \quad \int_{\Gamma} \frac{b}{2} dt = -2\pi N_M. \quad (2.6)$$

Эта последняя формула и формула (2.4)₁ § 1, где $f = \frac{b}{2}$ в силу выбора (2.2) функции J , дает

$$f_0 = -\pi N_M. \quad (2.7)$$

В силу того же выбора J и определения (2.4) § 1 функции g_0

$$g_0 = -\frac{L_0}{2} \int_{\Gamma} \frac{A_R}{R(A+C)} dt. \quad (2.8)$$

Но в силу гл. III § 1 (2.14) и в силу (2.5) на Γ имеем

$$dt = \frac{dR}{RH_Q} > 0, \quad H_Q = \frac{Q}{R^2}, \quad \text{т. е. } dt = \frac{RdR}{Q} > 0. \quad (2.9)$$

Формулы (2.8) и (2.6)₁ дают, таким образом,

$$g_0 = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{L_0}{Q} \frac{A_R dR}{A+C}; \quad 2\pi N_L = -\int_{\Gamma} \frac{L_0}{Q} \frac{dR}{R}. \quad (2.10)$$

Вычислим приближенное значение g_0 — значение при $b = 0$. В силу (2.5) уравнение Γ в этом случае имеет вид

$$\Gamma: Q^2 = A'(R) A''(R) - L_0^2, \text{ где } A' = RA(R) + CR, A'' = RA(R) - CR, \quad (2.11)$$

A' и A'' — аффинные функции; в силу замечания 2 A' возрастает. $A'(R) > 0$ при $R > 0$. Отсюда с помощью простого вычисления вычета

$$\int_{\Gamma} \frac{L_0}{Q} \frac{A'_R}{A'} dR = 2\pi. \quad (2.12)$$

Но в силу (2.11)₂

$$\frac{A'_R}{A'} = \frac{1}{R} + \frac{A_R}{A + C}.$$

Формулы (2.10) и (2.12) доказывают, следовательно, что

$$g_0 = -\pi(1 + N_L). \quad (2.13)$$

Формулы (2.7), (2.13) и в § 1 (2.4)₃ доказывают утверждение леммы.

Предположения, сделанные в п. 2 § 1, включая также и предположения примера 2 этого параграфа, удовлетворяются в силу следующей леммы:

Лемма 2.2. *Значения физических величин, определяющих A , B и C (замечание 2), таковы, что для уровней энергии E , которые будут рассматриваться в п. 3, величины*

$$f_0 = -\pi N_M, \quad g_0 = -\pi(1 + N_L), \quad N_{L^2}, N_{LM}, N_{M^2}$$

малы по сравнению с 1.

Доказательство. Выражение для функции $N[\cdot, \cdot]$ дано в гл. III, § 1 формулой (4.8), где A_0 , B_0 и C_0 определяются сопоставлением формул (4.6) и (4.20) гл. III, § 1:

$$\frac{1}{\hbar} N[L_0, M_0] = \alpha Z \left[\frac{\mu c^2 (\mu c^2 + 2\beta \mathcal{H} M_0 / \hbar)}{E^2} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[\left(\frac{L_0}{\hbar} \right)^2 - \alpha^2 Z^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.14)$$

где Z , c , μ , ϵ , E , $\mathcal{H}$ — физические величины, определенные в замечании 2,

$$\alpha = \frac{\epsilon^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \text{ — безразмерная «постоянная тонкой структуры»,} \quad (2.15)$$

$$\beta = \frac{\epsilon \hbar}{2\mu c} \text{ — «магнетон Бора».} \quad (2.16)$$

В п. 3 будут сделаны предположения:

$$0 < \frac{\mu c^2}{E} - 1 \simeq \frac{\alpha^2 Z^2}{2n^2}$$

(знак $\simeq$ означает порядок величины, n — целое число); магнитная энергия $\beta \mathcal{H}$ очень мала по сравнению с μc^2 , $2M_0/\hbar$ — целое число, не принимающее больших значений; $\frac{L_0}{\hbar} > \frac{1}{2}$.

Из этих предположений следует утверждение леммы.

3. Уровни энергии

Обозначения. В гл. III, § 1, была определена и применялась функция $F(n, k)$ ((4.23) и (4.25) гл. III, § 1):

$$F(n, k) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha Z}{n - k + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}} \right)^2}}. \quad (3.1)$$

Заметим знак ее производных:

$$F_n > 0, \quad F_k > 0.$$

С помощью этой функции F соотношение

$$\hbar k + N[\hbar k, \hbar m] = \hbar n, \quad (3.2)$$

где N определено формулой (2.14), может быть переписано в виде

$$E^2 = \mu c^2 [\mu c^2 + 2\beta \mathcal{H} m] F^2(n, k),$$

т. е. с той степенью точности, которую мы принимаем в формуле

$$E = \mu c^2 F(n, k) + \beta \mathcal{H} m. \quad (3.3)$$

В этих формулах α — «постоянная тонкой структуры» (2.15), β — магнетон Бора (2.16).

Теорема 3. Уровни энергии E , для которых система (2.3) (где l' и m' — действительные числа, квадратами которых можно пренебречь) имеет допустимые (см. § 1, определение 2) лагранжевы решения на компактном лагранжевом многообразии, определяются четверками квантовых чисел

$$j = l \pm \frac{1}{2}, \quad m, \quad n, \quad (3.4)$$

таких, что

$$l, m - \frac{1}{2}, \quad n \text{ целые}, \quad (3.5)$$

$$|m| \leq j, \quad 0 \leq l < n. \quad (3.6)$$

С точностью до пренебрежимых величин E следующим образом выражается через квантовые числа:

$$E = \mu c^2 F\left(n, l + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{\mu c^2}{2} \sqrt{F_k^2 + \frac{4m}{2l+1} F_k \frac{\beta \mathcal{H}}{\mu c^2} + \frac{\beta^2 \mathcal{H}^2}{\mu^2 c^4} + \beta \mathcal{H} m}. \quad (3.7)$$

Знак $\pm$ выбирается тот же, что и в (3.4).

Замечание 3.1. При $\mathcal{H} = 0$, так как $F_k > 0$, формула (3.7) сводится к следующей:

$$E = \mu c^2 F(n, k), \quad (3.8)$$

где

$$k = j + \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}. \quad (3.9)$$

Доказательство. Согласно теореме 2 § 1, уровни энергии E , для которых система (2.3) имеет решения, определенные на компактных лагранжевых многообразиях, это уровни, для которых квантовые числа удовлетворяют условиям (2.5) § 1. В силу приближенного выражения, которое лемма 2.1 дает для функции $\varepsilon[L_0, M_0]$, эти значения E должны приближенно совпадать с теми, для которых удовлетворяются условия

$$\begin{aligned} \hbar \left(l + \frac{1}{2}\right) + N \left[\hbar \left(l + \frac{1}{2}\right), \hbar m \right] = \\ = \hbar n \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{(1 + N_L)^2 + \frac{4m}{2l+1} (1 + N_L) N_M + N_M^2}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$|m| \leq l + \frac{1}{2}$, $l < n$; $l, m - \frac{1}{2}, n$ целые $1 + N_L$ и N_M малы.

В силу эквивалентности формул (3.2) и (3.3) окончательно приближенное выражение для E имеет вид

$$E = \mu c^2 F\left(n, l + \frac{1}{2}\right) \simeq \mu c^2 \left[1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{2n^2} \right], \quad (3.11)$$

что позволяет применить лемму 2.2. Согласно примеру 2 § 1, условие, что допустимые решения системы (2.3) отвечают выбору l, m, n и E , удовлетворяющих условию (3.10), таково:

$$|m| \leq l \pm \frac{1}{2},$$

т. е. что выполнены (3.6) и (3.4), причем знак $\pm$ выбирается один и тот же в (3.10) и (3.4).

Дадим явное выражение E как функции (l, m, n) . Так как (3.2) эквивалентно (3.3), то, с одной стороны, (3.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} E = \mu c^2 F\left(n \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + N_L)^2 + \frac{4m}{2l+1} (1 + N_L) N_M + N_M^2}, l + \frac{1}{2}\right) + \\ + \beta \mathcal{H} m. \end{aligned} \quad (3.12)$$

С другой стороны, $\forall dk, dm, dn$ эквивалентны следующие два соотношения:

$$(1 + N_L) dk + N_M dm = dn, \quad \mu c^2 (F_n dn + F_k dk) + \beta \mathcal{H} dm = 0.$$

Эта эквивалентность означает, что

$$\mu c^2 F_n = - \frac{\mu c^2 F_k}{1 + N_L} = - \frac{\beta \mathcal{H}}{N_M}.$$

Следовательно, так как $F_n > 0$,

$$\begin{aligned} F_n \sqrt{(1 + N_L)^2 + \frac{4m}{2l+1} (1 + N_L) N_M + N_M^2} = \\ = \sqrt{F_k^2 + \frac{4m}{2l+1} F_k \frac{\beta \mathcal{H}}{\mu c^2} + \frac{\beta^2 \mathcal{H}^2}{\mu^2 c^4}}. \end{aligned}$$

В силу этого равенства (3.12) эквивалентно (3.8).

Замечание 3.2. Уровни энергии, полученные в теореме 3, в точности совпадают с уровнями, полученными в классической теории атома Дирака: см., например, Бете и Салпитер [2]; при $\mathcal{H} = 0$ их формула (14.29) совпадает с нашей формулой (3.8), а при $\mathcal{H} \neq 0$ их формулы (46.12), (46.13), (46.15) соответствуют нашей формуле (3.7) с соответствующей заменой обозначений:

$$\text{Б. — С.: } E_0 = mc^2, \quad E_+, \quad E_-.$$

$$\text{Замечание 2 и п. 3: } \mu c^2, \quad \mu c^2 F(n, l+1), \quad \mu c^2 F(n, l);$$

$$\text{Б. — С.: } \frac{1}{2}(E_+ + E_-); \quad \Delta E = E_+ - E_-; \quad \mu_0; \quad \xi = \frac{\mathcal{H} \mu_0}{\Delta E};$$

$$: \mu c^2 F\left(n, l + \frac{1}{2}\right); \quad \mu c^2 F_k; \quad \beta; \quad \frac{\beta \mathcal{H}}{\mu c^2 F_k};$$

$$\text{Б. — С.: } E' = \Delta E \left[\xi m \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \xi \frac{4m}{2l+1} + \xi^2} \right];$$

$$: \beta \mathcal{H} m \pm \frac{\mu c^2}{2} \sqrt{F_k^2 + \frac{4m}{2l+1} F_k \frac{\beta \mathcal{H}}{\mu c^2} + \frac{\beta^2 \mathcal{H}^2}{\mu^2 c^4}}.$$

Замечание 3.3. Когда $\beta \mathcal{H}$ мало по сравнению с $\mu c^2 F_k$, формула (3.7), очевидно, может быть записана в виде

$$E = \mu c^2 F(n, k) + \beta \mathcal{H} g m, \quad \text{где } g = \frac{j + \frac{1}{2}}{l + \frac{1}{2}}.$$

— «множитель Ланде»: см. Бете — Салпитер [2], формулы (46.4) и (46.6).

4. Общая интерпретация спина в лагранжевом анализе

Окончательная аппроксимация состоит в том, что мы пренебрегаем

$\frac{\beta \mathcal{H}}{\mu c^2}$ по отношению к α^2

α^2 и, следовательно, F_k по отношению к 1.

Замечание 4.1. За счет этой аппроксимации квантовая механика была в состоянии оценить уровни энергии атома гелия: см. в книге Бете — Салпитер [2], гл. II, резюме этих очень трудоемких вычислений.

Эта аппроксимация связывает в уравнении $H = 0$ гамильтониан H релятивистского электрона (гл. III, § 1, (4.20)) с гамильтонианом нерелятивистского электрона (там же (4.19)), где $\mathcal{H} = 0$; в этом, втором, гамильтониане E — нерелятивистская энергия.

Окончательная формулировка теоремы 3, следовательно, такова:

Теорема 4.1. Пусть $(j = l \pm \frac{1}{2}, l, m, n)$ — четверка квантовых чисел системы (2.3), для которой существуют допустимые лагранжевы решения на компактном лагранжевом многообразии V ; это четверка, удовлетворяющая условиям (3.5) — (3.6). Окончательные выражения нерелятивистской энергии E , L_0 и M_0 как функций от этой четверки таковы:

$$E = -\mu c^2 \frac{\alpha^2 Z^2}{2n^2}, \quad L_0 = \hbar \left(l + \frac{1}{2} \right), \quad M_0 = \hbar m. \quad (4.1)$$

Окончательные уравнения V таковы:

$$V: H = 0, \text{ где } H = \frac{p^2}{2\mu} - E - \frac{e^2 Z}{R}, \quad L = \hbar \left(l + \frac{1}{2} \right), \\ M = \hbar m. \quad (4.2)$$

Замечание 4.2. В случае

$$|m| = j = l + \frac{1}{2}$$

мы имеем на V в силу (4.2) и определений L и M (гл. III, § 1, п. 1):

$$|M| = L, \text{ следовательно, } x_3 = p_3 = 0,$$

откуда $\dim V = 2$, что противоречит определению $\dim V = 3$.

Чтобы осмыслить этот результат без введения ненулевых l' и m' , удобно, может быть, применить понятие лагранжевой обобщенной функции и сослаться на некоторые работы Вороса [25] — [26].

Обозначения. Пусть $SO(3)$ — группа вращений $\rho: E^3 \rightarrow E^3$ вокруг начала координат. Определим действие оператора ρ на $E^3 \oplus E^3$ следующим образом:

$$\rho(x, p) = (\rho x, \rho p), \quad \text{где } (x, p) \in E^3 \oplus E^3.$$

Пусть $SO(2)$ — подгруппа вращений, оставляющих инвариантным I_3 (см. гл. I, § 1, п. 1), т. е. направление магнитного поля. Очевидно, тогда $SO(2)$ оставляет инвариантным V . Точнее, в силу гл. I, § 1, п. 1 и п. 2

$$V = SO(2) \times T^2,$$

где T^2 — двумерный тор, все точки которого остаются неподвижными под действием $SO(2)$. Напомним (§ 1, замечание 1.1), что универсальное накрытие $SO(3)$ есть $SU(2)$ и что это — накрытие 2-го порядка. Обозначая через $SU(1)$ накрытие 2-го порядка для $SO(2)$, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} SU(1) & \hookrightarrow & SU(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SO(2) & \hookrightarrow & SO(3), \end{array}$$

где вертикальные стрелки представляют собой естественную проекцию накрытий. Обозначим

$$V_2 = SU(1) \times T^2;$$

V_2 есть накрытие 2-го порядка для V ; $SU(1)$ действует на V_2 , оставляя неподвижными все точки T^2 .

Определение 4. Пусть V — лагранжево многообразие, φ_{R_0} его фаза в 2-репере R_0 и β — функция, отображающая $\tilde{V} \rightarrow \mathbf{C}$. В силу теоремы 2.2 (гл. II, § 2)

$$\tilde{U}_{R_0} = \left(\frac{\eta_V}{d_x^l} \right)^{1/2} \beta e^{v\varphi_{R_0}}$$

есть выражение в R_0 лагранжевой функции $\tilde{U}$, определенной $\text{mod } \frac{1}{v}$ на $\tilde{V}$.

Определение лагранжевой функции на V (гл. II, § 2, определение 3.2) обобщается следующим образом: пусть $\tilde{V}$ — какое-то накрытие V ; функция $\tilde{U}$ называется лагранжевой на $\tilde{V}$, если ограничение $\tilde{U}_{R_0}$ на v_0

$$\tilde{U}_{R_0}^0 = \left(\frac{\eta_V}{d_x^l} \right)^{1/2} \beta e^{v_0\varphi_{R_0}}$$

представляет собой отображение $\tilde{V} \setminus \tilde{\Sigma}_{R_0} \rightarrow \mathbf{C}$,

Вычисления, с помощью которых были установлены условия (3.11) гл. III, § 1, доказывают следующую теорему.

Теорема 4.2. *Условия (3.4) — (3.6), которым удовлетворяют четверки квантовых чисел, определяющие решение системы (2.3), выражают собой существование решения с постоянной лагранжевой амплитудой определенного $\text{mod } \frac{1}{v}$ на V_2 , но не на V .*

Заключение. Пусть V — лагранжево многообразие с уравнениями (4.2). Пусть $\tilde{U}$ — функция с постоянной лагранжевой амплитудой, определенная $\text{mod } \frac{1}{v}$ на $\tilde{V}$.

Окончательная интерпретация спина такова:

$\tilde{U}$ — лагранжева функция на V в случае, когда спин равен 0 (Шредингер).

$\tilde{U}$ — лагранжева функция на V_2 (но не на V) в случае, когда спин равен $\frac{1}{2}$ (Дирак).

5. Вероятность присутствия электрона

Напомним, что x есть положение, p — количество движения электрона: $(x, p) \in E^3 \oplus E^3$.

Заметим, что при условиях замечания 2

$$R_1 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$$

есть длина, называемая в первой квантовой теории «радиусом атома Бора», Z — атомное число ядра. Обозначим

$$x' = \frac{Zx}{R_1}, \quad R' = \frac{ZR}{R_1}.$$

Теорема 5. *Положение x электрона с квантовыми числами $(j = l \pm \frac{1}{2}, l, m, n)$ принадлежит проекции V_x на X многообразия $V[L_0, M_0]$. V_x есть часть X , содержащаяся между двумя концентрическими сферами и внешняя по отношению к некоторому конусу вращения вокруг магнитного поля. Центр этих сфер и вершина конуса совпадают с ядром атома.*

Примем, что на $V[L_0, M_0] \subset E^3 \oplus E^{3*}$ вероятность присутствия электрона пропорциональна инвариантной мере η_v [см. заключение введения к гл. III]. Тогда вероятность присут-

ствия электрона на V_x приближенно равна

$$\frac{1}{2\pi^3} \frac{l + \frac{1}{2}}{n^2} \times \int \frac{d^3 x'}{\sqrt{-R'^2 + 2n^2 R' - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 n^2} \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 (x_1'^2 + x_2'^2) - m^2 R'^2}}. \quad (5.1)$$

Приближенное определение V_x таково: V_x — часть X , на которой радикалы формулы (5.1) действительны.

Замечание 5.1. Если $|m| = l + \frac{1}{2}$, то V_x есть диск:

$$x_3 = 0; \quad R'^2 - 2n^2 R' + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 n^2 \leq 0.$$

Вероятность присутствия электрона на этом диске

$$\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{n^2} \int \frac{d^2 x'}{\sqrt{-R'^2 + 2n^2 R' - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 n^2}}.$$

Доказательство. На $V[L_0, M_0]$ вероятность присутствия электрона есть по определению

$$\frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{\Gamma} dt \right]^{-1} dt \wedge d\psi \wedge d\varphi, \text{ так как } \eta_V = dt \wedge d\psi \wedge d\varphi.$$

Проекция V_x многообразия $V[L_0, M_0]$ на X есть в силу гл. III, § 1, (1.5), (1.11), (1.12), множество точек $x \in X$, в которых

$$\left| \frac{x_3}{R} \right| \leq \sin \vartheta, \text{ где } \cos \vartheta = \frac{M_0}{L_0}. \quad (5.2)$$

Уравнение второй степени относительно Q

$$H[L_0, M_0, Q, R] = 0 \quad (5.3)$$

имеет действительные корни. V_x , следовательно, есть часть X , заключенная между сферами и конусом вращения, описанными в формулировке теоремы.

Формулы (1.5), (1.6) и (1.12) гл. III, § 1 показывают, что любая точка x , внутренняя к V_x , есть проекция 4 точек (t, ψ, φ) многообразия $V[L_0, M_0]$. В силу гл. III, § 1, (1.16), (3.6) и в силу (2.9)

$$d^3 x = -QR \sin \psi \sin \vartheta dt \wedge d\psi \wedge d\varphi, \quad dt = \frac{RdR}{Q} - \text{задание } x,$$

определяет $|Q|$. Вероятность присутствия электрона на V_x есть, следовательно,

$$\frac{1}{\pi^2} \left[\int_{\Gamma} \frac{RdR}{Q} \right]^{-1} \frac{d^3 x}{|Q| R |\sin \psi| \sin \vartheta}, \quad (5.4)$$

В силу гл. III, § 1, (1.12)₁

$$x_3 = R \cos \psi \sin \vartheta,$$

следовательно, в силу (5.2)₂

$$R |\sin \psi| |\sin \vartheta| = \frac{1}{L_0} [L_0^2 (x_1^2 + x_2^2) - M_0^2 R^2]^{1/2}, \quad \text{где } \frac{M_0}{L_0} \simeq \frac{m}{l + \frac{1}{2}}. \quad (5.5)$$

Определение Q из уравнения (5.3) дает (в силу (4.2), где E определено формулой (4.1) и $P^2 = \frac{Q^2 + L_0^2}{R^2}$)

$$Q \simeq \frac{\hbar}{n} \left[-R'^2 + 2n^2 R' - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 n^2 \right]^{1/2}, \quad (5.6)$$

откуда

$$\int_{\Gamma} \frac{R dR}{Q} \simeq 2\pi \frac{R_0^2}{Z^2} \frac{n^3}{\hbar}. \quad (5.7)$$

Из формул (5.5), (5.6) и (5.7) получаем для вероятности (5.4) ее приближенное значение (5.1). V_X , будучи частью X , на которой выражение (5.5) и Q действительны, определяется условием действительности радикалов в формуле (5.1).

Замечание 5.2. Теорема 5 определяет вероятность присутствия электрона, которая сильно отличается от соответствующей величины в волновой механике, но близка к первой квантовой механике: электрон принадлежит к компактной части $V_X \subset X$, которая есть объединение траекторий, рассматриваемых в этой первой квантовой теории; вероятность этого определяется простейшим образом, исходя из характеристических уравнений V_X .

Заключение. В настоящей работе рассматривается «квантование Маслова». С одной стороны, теорема 3 гл. IV, § 2 доказывает, что оно применимо в классической волновой механике, существенные результаты которой в этой теории сохраняются. С другой стороны, замечание 5.2 этой главы IV, § 2 доказывает, что это квантование дает результаты первой квантовой теории, сохраняя простоту вычислений. В гл. I и II показано, как это квантование, возникающее из чисто математических рассматриваний, может заменить квантование Бора — Зоммерфельда. С физической точки зрения такая замена будет оправдана, только если она окажется применимой к атому с несколькими электронами.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арнольд В. И. О характеристических классах, входящих в условие квантования. — Функциональный анализ и его приложения. 1967, т. I, вып. 1, с. 1—14.
- [2] Бете Г., Салпитер Е. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Пер. с франц. — М.: Физматгиз, 1960.
- [3] Буслаев В. С. Квантование и метод В. К. Б. — Труды Математического Института АН СССР, 1970, т. 110, с. 5—28.
- [4] Картан Э. Теория конечных и непрерывных групп. Пер. с франц. — М.: Изд-во МГУ, 1963.
- [5] Картан Э. Интегральные инварианты. Пер. с франц. — М.: Гостехиздат, 1940.
- [6] Choquet-Bruhat Y. Geometrie differentielle et systemes exterieurs. Dunod, 1968.
- [7] De Paris, J. C. Problème de Cauchy à données singulières pour un opérateur différentiel bien decomposable. — J. Math. pures et appl., 51, 465—488, 1972.
- [8] Гординг Л., Лере Ж., Котаке Т. Униформизация и асимптотическое разложение решения линейной задачи Коши с голоморфными данными. Аналогия с теорией асимптотических и приближенных волн. Пер. с франц. — М.: Мир, 1967.
- [9] Лефшец С. Алгебраическая топология. Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1949.
- [10] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Изд-во МГУ, 1965.
- [11] Maslov V. P. Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, suivie de deux notes complementaires d'Arnold v. I. et Bouslaev; traduction Lascoux, J et Seneor, R. Dunod, 1972.
- [12] Morse M. et Cairns S. Critical point theory in global analysis and differential geometry, Academic Press, 1969 (§ 4, Reduction theorem).
- [13] Schwartz L. Théorie des distributions, Hermann, 1951.
- [14] Segal I. E. Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom (I) Mat. Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 31, n° 12, 1—39, 1959.
- [15] Shale D. Linear symmetries of free boson fields, Trans. Amer. Math. Soc., 103, 149—167, 1962.
- [16] Souriau J. M. Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications 4th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Univ. of Nijmegen. 1975.
- [17] Стинрод Н. Топология косых произведений. Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1953, § 2, § 15.
- [18] Вейль А. О некоторых группах унитарных операторов. Сб. переводов «Математика», т. 13, вып. 5, 1969, с. 33—94.
- [19] Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, — Л. — М.: ГТТИ, 1933—1934.

II. ПУБЛИКАЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ЭТОЙ РАБОТОЙ

- [20] Crumeyrolle A. Revêtements spinoriels du groupe symplectique et indices de Maslov, C. R. Acad. Sc, Paris. 280, 1753—1756, 1977.
Une construction directe élémentaire de la classe de Chern, Ibid., 280, 1977.
- [21] Crumeyrolle A. Algèbre de Clifford symplectique, revêtements du groupe symplectique, indices de Maslov et spineurs symplectiques, J. Math. pures et appl. 56, 1967, p. 205—230.
- [22] Dazord P. La classe de Maslov — Arnold; L'opérateur canonique de Maslov; Séminaire de Géométrie; Université Claude Bernard [Lyon I], 1975/76.
Une interprétation géométriques de la classe de Maslov — Arnold, J. Math. pures et appl., 56, 1977, p. 231—250.
- [23] Guillemin V., Sternberg S. Geometric Asymptotics, Mathematical Surveys, A. M. S., 1977.
- [24] Malgrange B. Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 7, 405—430, 1974.
- [25] Voros A. The W. K. B. Maslov method for non-separable systems, Colloques internationaux du C. N. R. S., n° 237: Géométrie symplectique et physique mathématique.
- [26] Thèse.

III. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

- [27] Leray J. Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles (une adaptation du traité de V. P. Maslov). Convegno internazionale: Metodi valutativa nella fisica matematica; Accad. Naz. dei Lincei, Roma, 1972.
- [28] Complement à la théorie d'Arnold de l'indice de Maslov. Convegno di Geometrica simplettica et Fisica matematica, Istituto di Alta Matematica, Roma, 1973.
- [29] Solutions asymptotiques et groupe symplectique. Colloque sur les opérations du C. N. R. S. n° 237. Géométrie symplectique et physique Nice; Lecture Notes; Springer, 1974.
- [30] Solutions asymptotiques et physique mathématique. Colloques internationaux du C. N. R. S. n° 237. Géométrie symplectique et physique mathématique; Aix-en-Provence, 1974.
- [31] Solutions asymptotiques de l'équation de Dirac, Trends in applications of pure mathematics to mechanics, Conference at the University of Lecce, Pitman, 1975.
- [32] Analyse lagrangienne et mécanique quantique, Séminaire du College de France, 1976—1977 of R. C. P. 25, I. R. M. A., Strasbourg, 1978.

Данный текст в некоторых пунктах дополняет [32], а [32] содержит результаты [27], [31].

IV. ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ РЕДАКТОРОМ ПЕРЕВОДА

- [33] Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1977.
- [34] Guillemin V., Sternberg S. Geometric asymptotics. Amer. Math. Soc., 1977.
- [35] Leon G., Ferngne M. The waves representation Maslov index and θ -functions, Progress in Math., VI Basel, 1980.

- [36] Echmann G. P., Sénéor B. The Maslov — WKB method for (un) harmonic oscillator. Arch. Rat. Mech. and Anal., 61, N 2, 1976.
- [37] Yoshikawa A. On Maslov's canonical operator. Hokkaido Math. J., 1975, 4, N 1, 8—38.
- [38] Федорюк М. В. Особенности быстроосциллирующих интегралов и асимптотика решения смешанной задачи. — Успехи матем. наук. 1977, т. 32, вып. 6, с. 67—115.
- [39] Маслов В. П., Назайкинский В. Е. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения, I. Современные проблемы математики, т. 13, изд-во ВИНТИ, М., 1979, с. 1—144.
- [40] Карасёв М. В., Маслов В. П. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения, там же, с. 145—269.
- [41] Fujivara D. A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation. Journal d'Analyse Math., 1979, v. 35, 41—96.

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

A:	гл. I, § 1, опр. 1.2
C:	поле комплексных чисел
E³:	трехмерное евклидово пространство
J=i[1, ∞]:	гл. II, § 1, п. 1
N:	множество натуральных чисел (т. е. целых чисел ≥ 0)
R:	поле действительных чисел; R₊: множество положительных действительных чисел
Sⁿ:	<i>n</i> -мерная сфера
Z:	кольцо целых чисел

*

Arg:	аргумент
A ⊆ A:	(в гл. I и II)
B:	ограниченное множество (в гл. I и II)
A, B, C:	функции от <i>M</i> , коэффициенты оператора Шредингера — Клейна — Гордона (гл. III, § 1, пример 4.1)
E:	единица группы (в гл. I и II)
E:	уровень атомной энергии (в гл. III и IV)
F:	произвольная функция (в гл. II); функция (4.23) (в гл. III, § 1)
G:	группа (в гл. I и II), функция (в гл. III и IV)
H:	гамильтониан (в гл. II, § 3, п. 1 и опр. 6.1)
Hess:	гессиан гл. I, § 1, опр. 2.3
I_k, J_k ∈ E³:	гл. III, § 1, п. 1
Inert:	индекс инерции, гл. I, § 1, п. 2; § 2, п. 4, § 2, опр. 7.2
J^k:	матрицы, гл. II, § 4, п. 3, гл. IV, § 1, п. 1
K:	характеристическая кривая, гл. II, § 3, опр. 7.1, гл. III, § 1, (2.14)
K:	функция, гл. III, § 1, п. 4
L, M, P, Q, R:	функции, гл. III, § 1, п. 1
N:	функция от (<i>L, M</i>), гл. III, § 1, (2.9); <i>N_L, N_M</i> — ее производные
R:	(в гл. I и II), <i>R₀</i> (в гл. III и IV) — репер в симплектической геометрии: гл. I, § 3, п. 2 и 3

$Sp(l)$:	симплектическая группа, гл. I, § 1, опр. 1.1
$Sp_2(l)$:	накрытие симплектической группы 2-го порядка, гл. I, § 1, опр. 2.1
$S \in Sp_2(l)$	
T :	тор, гл. III, § 1, п. 3
U :	лагранжева функция на V , гл. II, § 2, п. 3
$\tilde{U}_R$:	формальная функция на $\tilde{V}$, гл. II, § 2, п. 2
$U(l)$:	унитарная группа, гл. I, § 2, п. 2
V :	лагранжево многообразие, гл. I, § 2, п. 9; § 3, п. 1
W :	гиперповерхность в Z
$W(l)$:	подмножество $U(l)$, гл. I, § 2, лемма 2.1
X, Z :	пространства, гл. I, § 1, п. 1; § 3, п. 1

*

a :	дифференциальный, формальный или лагранжев оператор, гл. I, § 1, опр. 3.1; гл. II, § 1, опр. 6.2, § 2, опр. 1.1
d :	дифференцирование; $d^l x$ — мера Лебега
$\det$:	определитель
$e = 2,71828\dots$, e :	единица группы (гл. I)
$i = \sqrt{-1}$	
i_ξ :	внутреннее произведение, гл. II, § 2, п. 2
j :	квантовое число, гл. IV, § 1, пример 2
l :	размерность пространства X (в гл. I и II) $\dim X = 3$ (в гл. III и IV)
l, m, n :	квантовые числа, гл. III и IV, гл. III, § 1, п. 3
m, m_R :	индекс Маслова, гл. I, § 1, опр. 1.2 и (2.15); § 2, опр. 5.3 и теор. 5; § 3, теор. 1 и п. 3
$s = Sp(l)$:	(в гл. I и II), функция (в гл. III и IV)
t :	функция, гл. III, § 1, (2.6)
$u \in U(l)$:	(в гл. I); ${}^t u$ транспонированная матрица U ; гл. I, § 2, п. 3
U :	формальное число или функция, гл. II, § 1, п. 2

*

$\mathcal{A}$:	гл. I, § 1, п. 1
$\mathcal{B}, \mathcal{C}$:	гл. II, § 1, п. 1
$\mathcal{F}, \mathcal{F}'$:	пространства формальных или лагранжевых функций или обобщенных функций, гл. II, § 1, п. 2, п. 7, § 2, п. 2, п. 3, п. 5
$\mathcal{H}$:	гильбертово пространство, гл. I, § 1, п. 1
$\mathcal{L}$:	производная Ли, гл. II, § 3, опр. 3.2
$\mathcal{N}$:	окрестность
$\mathcal{P}, \mathcal{P}'$:	пространства Шварца, гл. I, § 1, п. 1

*

- Γ : дуга (в гл. I, § 2), кривая (в гл. III, § 1, (2.5))
 Δ : лапласиан; Δ_0 : сферический лапласиан, гл. III, § 3, (2.4)
 Λ : лагранжев грассманиан, гл. I, § 2, п. 2; § 3, п. 1
 $\wedge$: внешнее произведение
 π : проекция, гл. II, § 1, теор. 2.1
 Σ : особый контур, Σ_{sp} гл. I, § 1, опр. 1.3
 Σ_V : гл. I, § 2, п. 9, Σ_R гл. I, § 3, п. 2
 φ, ψ, ϑ : эйлеровы углы, гл. III, § 1, (1.111) и (1.12)
 Ω : функция, гл. III, § 1, (2.8)
 Ω : открытое множество в Z , гл. II, § 1, п. 6; § 2, п. 1
 Ω^6 : открытое множество в $E^3 \oplus E^3$, гл. III, § 1, п. 1
 α : амплитуда, гл. II, § 1, п. 2
 β_0 : лагранжева амплитуда, гл. II, § 2, теор. 2.2
 γ : дуга или гомотопический класс
 η, η_V : инвариантная мера на V , гл. II, § 3, опр. 3.2
 κ : характеристический вектор, гл. II, § 3, опр. 3.1
 $\lambda \in \Lambda$: (в гл. I и II)
 λ, μ : функции, гл. III, § 1, (2.10)
 $v \in J$: гл. II, § 1, п. 1
 $v_0 = \frac{i}{\hbar} = \frac{2ai}{h} (h \in \mathbf{R}_+)$: гл. II, § 2, п. 3; § 3, п. 6
 $\pi = 3,14159\dots, \pi_j$: j -я группа гомотопий, гл. I, § 2, п. 3
 $\sigma[\cdot], \sigma_j$: матрицы Паули, гл. IV, § 1, (1.6), (1.7)
 $\chi = \eta/d^l x$:
 φ : фаза, гл. I, § 2, п. 9, § 3, п. 2; гл. II, § 1, п. 2
 ψ : лагранжева фаза, гл. I, § 3
 ω, ω пфаффовы формы; ω_j : гл. III, § 1, (1.7)

*

ОБОЗНАЧЕНИЯ АТОМНОЙ ФИЗИКИ /ИЗ ГЛ. III И IV/

- E : энергия, c : скорость света; $\hbar$ — постоянная Планка;
 $\mathcal{A}_j$: векторный потенциал, $\mathcal{H}$: магнитное поле; $\alpha = \frac{1}{137}$;
 β : магнетон Бора; e : заряд; μ : масса, гл. III, § 1, п. 4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава I. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГРУППА	9
Введение	9
§ 1. Дифференциальные операторы, метаплектическая и симплектическая группы	9
0. Введение	9
1. Метаплектическая группа $Mp(l)$	9
2. Подгруппа $Sp_2(l)$ группы $Mp(l)$	17
3. Дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами	27
§ 2. Индексы Маслова; индексы инерции; лагранжевы многообразия и их ориентация	31
0. Введение	31
1. Выбор эрмитовой структуры в $Z(l)$	31
2. Лагранжев грассманиан $\Lambda(l)$ в $Z(l)$	33
3. Накрытия $Sp(l)$ и $\Lambda(l)$	36
4. Индексы инерции	41
5. Индекс Маслова m на $\Lambda_\infty^2(l)$	46
6. Скачок индекса Маслова $m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty)$ в точке (λ, λ') , где $\dim \lambda \cap \lambda' = 1$	50
7. Индекс Маслова на $Sp_\infty(l)$. Смешанный индекс инерции	54
8. Индексы Маслова на $\Lambda_q(l)$ и $Sp_q(l)$	56
9. Лагранжевы многообразия	57
10. q -ориентация ($q = 1, 2, \dots, \infty$)	59
§ 3. Симплектические пространства	60
0. Введение	60
1. Симплектическое пространство Z	61
2. Реперы в Z	62
3. q -реперы пространства Z	63
4. q -симплектические геометрии	67
Глава II. ЛАГРАНЖЕВЫ ФУНКЦИИ. ЛАГРАНЖЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ	68
Введение	68
§ 1. Формальный анализ	69
0. Резюме	69
1. Алгебра $\mathcal{C}(X)$ асимптотических классов эквивалентности. Алгебра $\mathcal{B}(X)$	69
2. Формальные числа; формальные функции	73
3. Интегрирование элементов $\mathcal{F}_0(X)$	79
4. Преобразование формальных функций элементами $Sp_2(l)$	86

5. Скалярное произведение и норма формальных функций с компактным носителем	91
6. Формальные дифференциальные операторы	96
7. Формальные обобщенные функции	100
§ 2. Лагранжев анализ	103
0. Резюме	103
1. Лагранжевы операторы	104
2. Лагранжевы функции на $\tilde{V}$	107
3. Лагранжевы функции на V	112
4. Группа $Sp_2(Z)$	120
5. Лагранжевы обобщенные функции	120
§ 3. Однородные лагранжевы системы с одной неизвестной функцией	121
0. Резюме	121
1. Лагранжевы многообразия, на которых определены лагранжевы решения уравнения $aU = 0$	121
2. Теория Э. Картана [5] форм Пфаффа	122
3. Лагранжевы многообразия симплектического пространства и его гиперповерхности	125
4. Вычисление значения aU	131
5. Решение лагранжева уравнения $aU = 0$	135
6. Решения лагранжева уравнения $aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}$ с положительной амплитудой; квантование Маслова	138
7. Решение некоторых лагранжевых систем с одной неизвестной функцией	140
8. Лагранжевы обобщенные функции. Решение однородной лагранжевой системы	146
§ 4. Однородные лагранжевы системы с несколькими неизвестными	147
1. Вычисление $\sum_{m=1}^{\mu} a_n^m U_m$	147
2. Решение лагранжевой системы $aU = 0$ в случае, когда $\det a_0^0$ имеет только простые нули	151
3. Частный случай лагранжевой системы $aU = 0$, для которой $\det a_0^0$ имеет кратные нули	154
Глава III. УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И КЛЕЙНА — ГОРДОНА ДЛЯ АТОМА ЭЛЕКТРОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ	157
Введение	157
§ 1. Гамильтониан H , к которому применима теорема 7.1 (гл. II, § 3). Уровни энергии атома электрона с эффектом Зеемана	160
1. Четыре функции, из которых все пары, кроме одной, находятся в инволюции на $E^3 \oplus E^3$	160
2. Выбор гамильтониана H	164
3. Квантованные торы $T(l, m, n)$	167
4. Примеры: операторы Шредингера и Клейна — Гордона	171
§ 2. Лагранжево уравнение $aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}$ (a ассоциировано с H ; U имеет лагранжеву амплитуду ≥ 0 и определено на компактном многообразии V)	176
0. Введение	176
1. Решения уравнения $aU = 0 \pmod{\frac{1}{v^2}}$ с лагранжевой амплитудой ≥ 0 , определенные на торах $V[L_0, M_0]$	177

2. Компактные лагранжевы многообразия V , отличные от торов $V[L_0, M_0]$, на которых существуют решения уравнения $aU = 0 \bmod \frac{1}{v^2}$ с лагранжевой амплитудой ≥ 0	182
3. Пример: оператор Шредингера — Клейна — Гордона	194
§ 3. Лагранжева система: $aU = (a_M - \text{const})U = (a_{L^2} - \text{const})U = 0$ когда a — оператор Шредингера — Клейна — Гордона	197
0. Введение	197
1. Коммутативность операторов a , a_{L^2} и a_M , ассоциированных с гамильтонианами H (§ 1, п. 2), L^2 и M (§ 1, п. 1)	197
2. Случай оператора a , коммутирующего с a_{L^2} и a_M , ...	200
3. Более специальный случай	209
4. Случай Шредингера — Клейна — Гордона	214
§ 4. Уравнение в частных производных Шредингера — Клейна — Гордона	218
0. Введение	218
1. Изучение задачи (0.1) без предположения (0.4)	219
2. Случай Шредингера — Клейна — Гордона	222
Глава IV. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА С ЭФФЕКТОМ ЗЕЕМАНА	225
Введение	225
§ 1. Лагранжева задача с двумя неизвестными	225
1. Выбор операторов, коммутирующих $\bmod \frac{1}{v^3}$	225
2. Решение лагранжевой задачи с двумя неизвестными	227
§ 2. Уравнение Дирака	235
0. Резюме	235
1. Редукция уравнения Дирака в лагранжевом анализе	235
2. Приведенное уравнение Дирака для атома электрона в постоянном магнитном поле	240
3. Уровни энергии	244
4. Общая интерпретация спина в лагранжевом анализе	247
5. Вероятность присутствия электрона	249
Литература	252
Указатель основных обозначений	255

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Ж. Лере

ЛАГРАНЖЕВ АНАЛИЗ
И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Научный редактор А. А. Бряндинская
Младший научный редактор Л. С. Суркова
Художник А. В. Шипов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Е. Н. Подчепаева
Корректор Н. А. Гиря

ИБ № 2545

Сдано в набор 23.01.81. Подписано к печати 20.08.81. Формат 60×90¹/₁₆.
Бумага кн. журн. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.
Объем 8,25 бум. л. Усл. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 13,21. Усл. кр.-отт. 16,74.
Изд. № 1/1268. Тираж 6000 экз. Заказ 1005. Цена 1 р. 80 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

1-й Рижский пер., 2.
129820, Москва, И-110, ГСП

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового
Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга»
им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном
комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

В издательстве «Мир»
готовится к выпуску

Численные методы теория дифракции Сб. статей
1980. Пер. с англ., 14 л.

Сборник статей известных американских специалистов в области дифракции. Дан обзор основных идей и методов, приведены конкретные численные примеры, указаны области применения методов.

Для специалистов по прикладной математике, физиков, инженеров, геофизиков, а также для аспирантов и студентов университетов.

Если Вы желаете приобрести эту книгу, оставьте в книжном магазине предварительный заказ. Своевременное оформление заказа гарантирует Вам приобретение нужной книги.

В издательстве «Мир»
готовится к выпуску

Сато М., Дзимбо М., Мива Т. Голономные квантовые поля. Сб. статей 1980. Пер. с англ., 15 л.

Книга известных японских математиков объединяет различные математические теории для решения актуальной задачи современной математической физики — вычисления корреляционных функций в точно решаемых моделях квантовой теории поля и статистической механики.

Для математиков различных специальностей, физиков-теоретиков, механиков.

Если Вы желаете приобрести эту книгу, оставьте в книжном магазине предварительный заказ. Своевременное оформление заказа гарантирует Вам приобретение нужной книги.

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

ВЫШЛИ В СВЕТ

1. Ф. Гриффитс, Дж. Кинг. Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий.
2. Вычисления в алгебре и теории чисел.
3. Л. Заде. Понятие лингвистической переменной и его применение к понятию приближенных решений.
4. Гладкие динамические системы.
5. Л. Ниренберг. Лекции по нелинейному функциональному анализу.
6. Конструктивная теория поля.
7. К. Престон. Гиббсовские состояния на счетных множествах.
8. Д. Орнштейн. Эргодическая теория, случайность и динамические системы.
9. М. Гусман. Дифференцирование интегралов в R^n .
10. Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения.
11. Гиббсовские состояния в статистической физике.
12. Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход.
13. Р. Боуэн. Методы символической динамики.
14. Математические методы в теории систем.
15. Р. Харви. Голоморфные цепи и их границы.
16. К теории конечных групп.
17. О. О'Мира. Лекции о симплектических группах.
18. Исследования по метрической теории поверхностей.
19. Проблемы комбинаторного анализа.
20. Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами.
21. Разрешимые и простые бесконечные группы.
22. Странные аттракторы.
23. Гомотопическая теория дифференциальных форм.
24. Крайзель Г. Исследования по теории доказательств.
25. Гомотопическая теория дифференциальных форм.

ГОТОВЯТСЯ К ВЫПУСКУ

- Т. Чепмэн. Лекции о Q -многообразиях.
Р. Мандельбаум. Четырехмерная топология.
Т. Спрингер. Теория инвариантов.